

구멍이 있는 영역에서의 Green 정리

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad C = C_1 \cup C_2$$

공학수학 II · 강의노트 §10.12 Example 풀이

1 문제

$C = C_1 \cup C_2$ 가 그림 1의 색칠한 영역 R 의 경계일 때

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

를 구한다. C_1 은 정사각형, C_2 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이고, C 는 양의 방향(영역 R 이 항상 왼쪽에 오도록)으로 돈다. 즉 C_1 은 반시계 방향, C_2 는 시계 방향이다.

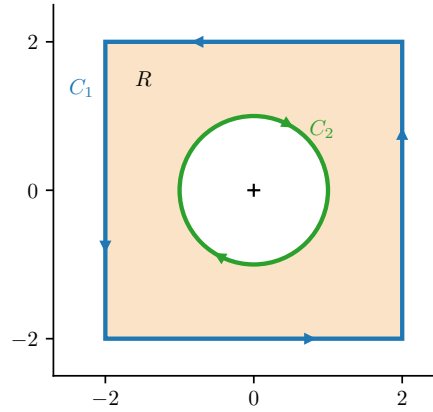


그림 1: 영역 R 과 경계의 방향. 원점(피적분 함수가 정의되지 않는 점)은 구멍 안에 있다.

2 풀이

$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 로 두면

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

따라서 원점을 제외한 모든 곳에서 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ 이다.

원점은 구멍 안에 있으므로 P , Q 와 그 편도함수는 R 과 그 경계에서 연속이다. 구멍이 있는 영역에 대한 Green 정리(강의노트의 *Region with Holes*)를 쓸 수 있다.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0.$$

답

$$\oint_{C_1 \cup C_2} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

3 직접 계산으로 확인

C_2 를 따로 계산해 본다. 원 $x = \cos t, y = \sin t$ 에서 $x^2 + y^2 = 1$ 이므로 반시계 방향($0 \leq t \leq 2\pi$)으로 돌면

$$\oint_{C_2 \text{ (반시계)}} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t] dt = 2\pi.$$

C_2 는 시계 방향이므로 기여는 -2π 이다. 정사각형 C_1 (반시계)을 수치적분하면 표 1처럼 2π 가 나온다. 합은 $2\pi - 2\pi = 0$ 으로 위의 결과와 일치한다.

표 1: 각 경계 위의 선적분(수치적분, 정사각형은 $[-2, 2] \times [-2, 2]$)

경로	적분값
C_1 (정사각형, 반시계)	6.2831853072
C_2 (원, 시계)	-6.2831853072
$C = C_1 \cup C_2$	0.0000000000
참고: 2π	6.2831853072

비고. $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ 이지만 이 장은 원점을 감싸는 닫힌 곡선을 따라 적분하면 0이 아니다(다음 Example 참조). R 이 원점을 포함하지 않는 구멍 난 영역이기 때문에 Green 정리가 성립하는 것이고, 원점을 포함한 정사각형 전체에 대해 Green 정리를 쓰면 틀린 답 0이 나온다.