

원점을 감싸는 정사각형을 따른 선적분

경로를 원으로 바꾸어 계산하기 (경로 변형)

공학수학 II · 강의노트 §10.12 Example 풀이

1 문제

앞 Example의 정사각형 C_1 (반시계 방향)을 따라

$$\oint_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

를 구한다.

2 풀이

C_1 이 둘러싼 정사각형 전체에는 원점이 들어 있다. 원점에서 P, Q 가 정의되지 않으므로 정사각형 전체에 Green 정리를 직접 쓸 수는 없다.

대신 앞 Example의 결과를 쓴다. 정사각형과 원 사이의 영역 R 에 대해

$$0 = \oint_{C_1} P dx + Q dy + \oint_{C_2 \text{ (시계)}} P dx + Q dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy - \oint_{C_2 \text{ (반시계)}} P dx + Q dy.$$

따라서 정사각형 위의 적분은 반시계 방향 원 위의 적분과 같다.

$$\oint_{C_1} P dx + Q dy = \oint_{x^2+y^2=1} P dx + Q dy.$$

원 $x = \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)에서는 $x^2 + y^2 = 1$ 이고 $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$ 이므로

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

답

$$\oint_{C_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

3 해석: 각도의 변화

극좌표에서 $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ 이면

$$d\theta = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

즉 피적분 식은 각도의 미소 변화이고, 선적분은 곡선을 따라 돌 때 θ 가 변한 총량이다. 원점을 반시계 방향으로 한 바퀴 감싸는 닫힌 곡선이면 모양에 상관없이 θ 가 2π 늘어난다. 원점을 감싸지 않으면 0이다.

- 정사각형, 원, 타원 등 원점을 한 번 감싸는 모든 곡선: 2π .
- 원점을 n 번 감싸는 곡선: $2\pi n$ (권선수, winding number).

$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ 인데도 닫힌 곡선 적분이 0이 아니다. 이는 $\mathbf{f}$ 가 정의된 영역(원점을 뺀 평면)이 단순연결이 아니기 때문이다. 이 영역에서 θ 는 한 값으로 정해지는 퍼텐셜 함수가 되지 못한다.

표 1: 여러 닫힌 곡선(반시계)에서의 수치적분

닫힌 곡선	적분값
정사각형 $[-2, 2]^2$	6.2831853072
원 $x^2 + y^2 = 1$	6.2831853072
타원 $x = 3 \cos t, y = \sin t$	6.2831853072
원점을 감싸지 않는 정사각형 (중심 $(3, 0)$, 반변 1)	0.0000000000