# 삼중적분으로 구하는 입체의 부피

$z = 1 - y^2$, $y = 2x$, $x = 3$으로 둘러싸인 제1팔분공간의 입체

공학수학 II · 강의노트 §10.15 Example 풀이

## 1 문제

제1팔분공간$(x, y, z \geq 0)$에서 $z = 1 - y^2$, $y = 2x$, $x = 3$의 그래프로 둘러싸인 입체의 부피를 구한다.

## 2 영역 정하기

- **위아래:** 아래는 $z = 0$ (제1팔분공간), 위는 포물기둥 $z = 1 - y^2$. $z \geq 0$이어야 하므로 $0 \leq y \leq 1$.
- **$xy$-평면으로의 정사영 $R$:** $y = 2x$ (즉 $x = y/2$), $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$로 둘러싸인 사다리꼴(그림 1(b)).

$R$을 Type II로 보면 $0 \leq y \leq 1$, $y/2 \leq x \leq 3$이다.

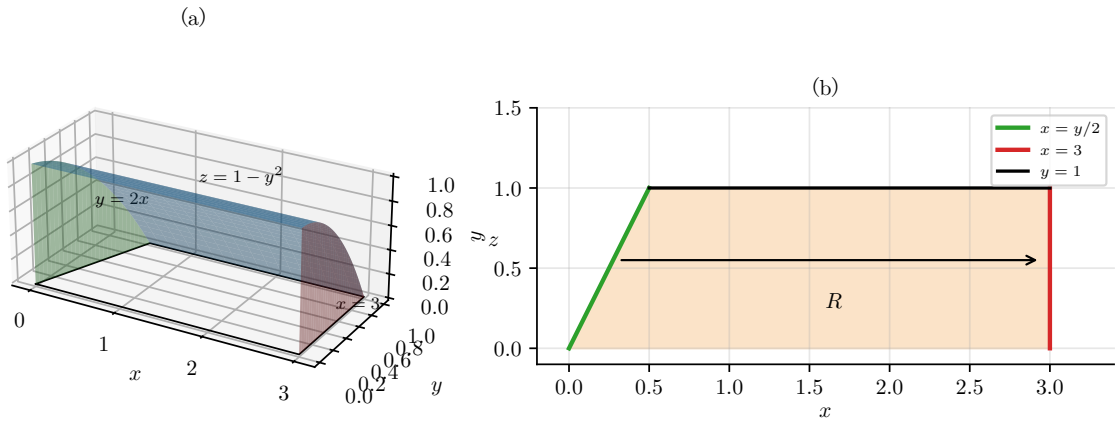


**그림 1:** (a) 입체, (b) $xy$-평면으로의 정사영 $R$.

## 3 풀이

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{y/2}^{3} \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{y/2}^{3} (1 - y^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{y}{2}\right)(1 - y^2)\, dy = \int_0^1 \left(3 - \frac{y}{2} - 3y^2 + \frac{y^3}{2}\right) dy \\
&= 3 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.
\end{aligned}
$$

**답**

$$V = \frac{15}{8} = 1.875$$

## 4 확인: 적분 순서를 바꾸어

$R$을 Type I로 보면 $x$의 범위에 따라 위쪽 경계가 바뀐다. $0 \le x \le \frac{1}{2}$에서는 $0 \le y \le 2x$, $\frac{1}{2} \le x \le 3$에서는 $0 \le y \le 1$이다. 따라서

$$V = \int_0^{1/2}\int_0^{2x} (1-y^2)\,dy\,dx + \int_{1/2}^{3}\int_0^{1} (1-y^2)\,dy\,dx = \int_0^{1/2}\Big(2x - \frac{8x^3}{3}\Big)dx + \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3} = \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\Big) + \frac{5}{3} = \frac{15}{8}.$$

수치적분(`scipy.integrate.tplquad`)으로도 $V = 1.8750000000$을 얻는다.

**비고.** Type II 순서($dx$를 안쪽에)가 적분 한 번으로 끝나서 더 간단하다. 적분 순서는 정사영 영역의 경계가 한 식으로 표현되는 쪽을 고르는 것이 좋다.