

정규직교 집합의 확인

$\{1/\sqrt{2\pi}, \cos nx/\sqrt{\pi}\}$ 가 $[-\pi, \pi]$ 에서 정규직교임을 보이기

공학수학 II · 강의노트 §11.1 Example 풀이

1 문제

다음 집합이 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 정규직교 집합임을 확인한다.

$$\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (1.1)$$

정규직교란 $(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m \phi_n dx = 0$ ($m \neq n$)이고 $\|\phi_n\|^2 = (\phi_n, \phi_n) = 1$ 이라는 뜻이다.

2 직교성

곱을 함으로 바꾸는 공식 $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$ 와, 정수 $k \neq 0$ 에 대해 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ 이라는 사실을 쓴다.

- $m \neq n$ ($m, n \geq 1$): $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx = 0.$
- ϕ_0 와 ϕ_n ($n \geq 1$): $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0.$

3 노름

$$\|\phi_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 1, \quad \|\phi_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1. \quad (3.1)$$

결론

$(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$ 이므로 $\{1/\sqrt{2\pi}, \cos nx/\sqrt{\pi}\}_{n \geq 1}$ 는 $[-\pi, \pi]$ 에서 정규직교 집합이다.

수치적분으로 계산한 내적 행렬(Gram 행렬)도 단위행렬이다(표 1).

표 1: (ϕ_i, ϕ_j) 의 수치적분 값

	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
ϕ_0	1.000000	0	0	0
ϕ_1	0	1.000000	0	0
ϕ_2	0	0	1.000000	0
ϕ_3	0	0	0	1.000000

4 보충

- 같은 방법으로 $\sin nx/\sqrt{\pi}$ ($n \geq 1$)도 서로 정규직교이고, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$ (기함수의 적분) 이므로 코사인과의 직교한다. 따라서 $\{1/\sqrt{2\pi}, \cos nx/\sqrt{\pi}, \sin nx/\sqrt{\pi}\}$ 전체가 정규직교 집합이고, 이것이 Fourier 급수의 기저이다(§11.2).
- 정규직교 기저에서는 전개 계수가 단순히 내적이 된다: $f = \sum c_n \phi_n$ 이면 $c_n = (f, \phi_n)$ 이다(§11.1의 공식에서 $\|\phi_n\|^2 = 1$).

- 정규화 상수만 다를 뿐 $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ 도 직교 집합이다. 이 경우 노름이 $\|1\|^2 = 2\pi$, $\|\cos nx\|^2 = \pi$ 이므로 Fourier 계수 공식에 $\frac{1}{\pi}$ 과 $\frac{a_0}{2}$ 가 나타난다.