

e^{-x} 의 복소 Fourier 급수와 주파수 스펙트럼

복소 계수, 실수 계수와의 관계, 점프에서의 수렴

공학수학 II · 강의노트 §11.4 Example 풀이

1 문제

$f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$ 를 복소 Fourier 급수로 전개하고 주파수 스펙트럼을 구한다.

2 복소 Fourier 계수

$p = \pi$ 이므로 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ 이다.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{1+in}. \quad (2.1)$$

$e^{\pm in\pi} = (-1)^n$ 이므로 분자는 $(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) = 2(-1)^n \sinh \pi$ 이다.

최종 해

$$c_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+in)} = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi} \frac{1-in}{1+n^2}, \quad e^{-x} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (2.2)$$

주파수 스펙트럼: 기본 주기 $T = 2\pi$, 기본 각진동수 $\omega = 2\pi/T = 1$ 이고, 점 $(n\omega, |c_n|) = \left(n, \frac{\sinh \pi}{\pi\sqrt{1+n^2}}\right)$ 의 그림이다.

계수는 수치적분 값과 일치한다(표 1). f 가 실함수이므로 $c_{-n} = \overline{c_n}$ 이고, 스펙트럼 $|c_n|$ 은 n 에 대해 대칭이다(그림 1).

표 1: 복소 Fourier 계수 ($c_{-n} = \overline{c_n}$)

n	$\text{Re } c_n$	$\text{Im } c_n$	$ c_n $
0	+3.67608	+0.00000	3.67608
1	-1.83804	+1.83804	2.59938
2	+0.73522	-1.47043	1.64399
3	-0.36761	+1.10282	1.16248
4	+0.21624	-0.86496	0.89158

3 실수 Fourier 급수와의 관계

$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \text{Re } c_n$, $b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2 \text{Im } c_n$ 이므로

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad b_n = \frac{2(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad e^{-x} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) \right]. \quad (3.1)$$

($a_0/2 = c_0 = \sinh \pi/\pi$.) 실수 계수를 직접 적분해도 같은 결과가 나오지만, 복소 형태는 지수함수 하나만 적분하면 되므로 계산이 간단하다.

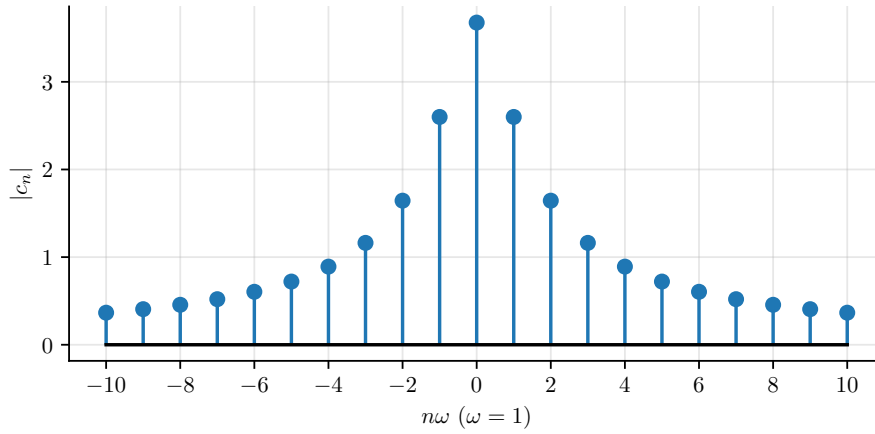


그림 1: 주파수 스펙트럼 $|c_n| = \sinh \pi / (\pi \sqrt{1+n^2})$. $|n|$ 이 크면 $1/|n|$ 로 줄어든다.

4 수렴

급수는 주기 2π 인 함수를 나타낸다. 주기 확장은 $x = \pm\pi$ 에서 e^π 에서 $e^{-\pi}$ 로 점프하므로, 그 점에서 급수는 평균 $\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi \approx 11.59$ 로 수렴한다. 점프 때문에 계수가 $1/|n|$ 로 느리게 줄어들고, 점프 근처에서 Gibbs 현상이 나타난다(그림 2). $x = \pi$ 를 대입하면 $\cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2} \right]$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}$ 라는 급수 합 공식도 얻는다.

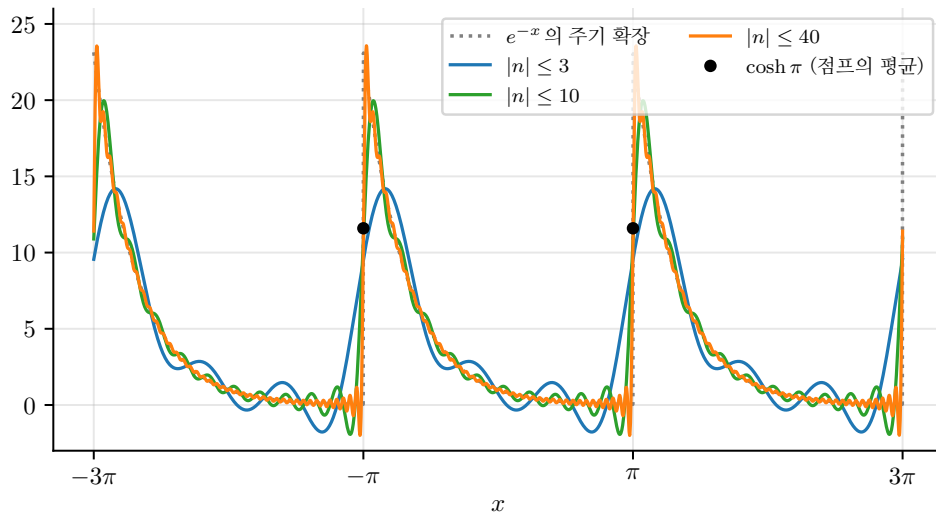


그림 2: 부분합 $\sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx}$. 점프 $x = \pm\pi$ 에서 평균값 $\cosh \pi$ 로 수렴하고 근처에서 Gibbs 현상이 보인다.