주기 경계조건을 갖는 고유값 문제

Fourier 급수의 기저가 나오는 이유

공학수학 II · 강의노트 §11.5 Example 풀이

1 문제

$y'' + \lambda y = 0$, $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$의 고유함수가

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{L}x,\ \cos\frac{2\pi}{L}x,\ \dots,\ \sin\frac{\pi}{L}x,\ \sin\frac{2\pi}{L}x,\ \dots\right\} \tag{1.1}$$

임을 보이고, 이 집합이 $[-L, L]$에서 직교함을 확인한다.

2 풀이

$\lambda = -k^2 < 0$. $y = A\cosh kx + B\sinh kx$. $y(L) - y(-L) = 2B\sinh kL = 0 \Rightarrow B = 0$, $y'(L) - y'(-L) = 2Ak\sinh kL = 0 \Rightarrow A = 0$. 자명해뿐이다.

$\lambda = 0$. $y = A + Bx$. $y(L) - y(-L) = 2BL = 0 \Rightarrow B = 0$이고, $y' = 0$이므로 두 번째 조건은 저절로 만족한다. 따라서 $\lambda_0 = 0$**은 고유값**이고 고유함수는 상수 1이다.

$\lambda = k^2 > 0$. $y = A\cos kx + B\sin kx$. 코사인은 짝함수, 사인은 기함수이므로

$$y(L) - y(-L) = 2B\sin kL = 0, \qquad y'(L) - y'(-L) = -2Ak\sin kL = 0. \tag{2.1}$$

$\sin kL \neq 0$이면 $A = B = 0$이므로, 비자명해가 있으려면 $\sin kL = 0$, 즉 $k = n\pi/L$ $(n = 1, 2, \dots)$이다. 이때 두 조건이 A, B와 관계없이 성립하므로 A와 B를 **모두 자유롭게** 고를 수 있다.

최종 해

$$\lambda_0 = 0:\ y_0 = 1; \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2:\ y_n = A_n\cos\frac{n\pi x}{L} + B_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{2.2}$$

따라서 고유함수 집합은 $\{1,\ \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L}\}_{n\geq 1}$이다.

3 직교성

§11.5의 증명에서 경계항은 $r(b)[y_m y_n' - y_n y_m']_b - r(a)[y_m y_n' - y_n y_m']_a$이다. 이 문제에서는 $r = 1$이고, 주기 조건 $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$에 의해 두 경계항이 같으므로 상쇄된다(특이 Sturm–Liouville 문제의 경우 4). 따라서 서로 다른 고유값의 고유함수는 직교한다. 같은 고유값에 속하는 $\cos\frac{n\pi x}{L}$과 $\sin\frac{n\pi x}{L}$은 짝함수와 기함수의 곱이므로 $\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$이다. 결국 전체 집합이 $[-L, L]$에서 직교하고, 이것이 Fourier 급수의 기저이다(그림 1).

비고. 정칙 Sturm–Liouville 문제에서는 각 고유값에 고유함수가 하나뿐이다(§11.5의 성질 2). 그러나 주기 경계조건은 두 끝점의 값을 서로 **연결**하는 조건이어서 분리형(separated) 조건이 아니므로 그 정리가 적용되지 않는다. 실제로 $\lambda_n > 0$마다 독립인 고유함수가 두 개(cos, sin) 있다.

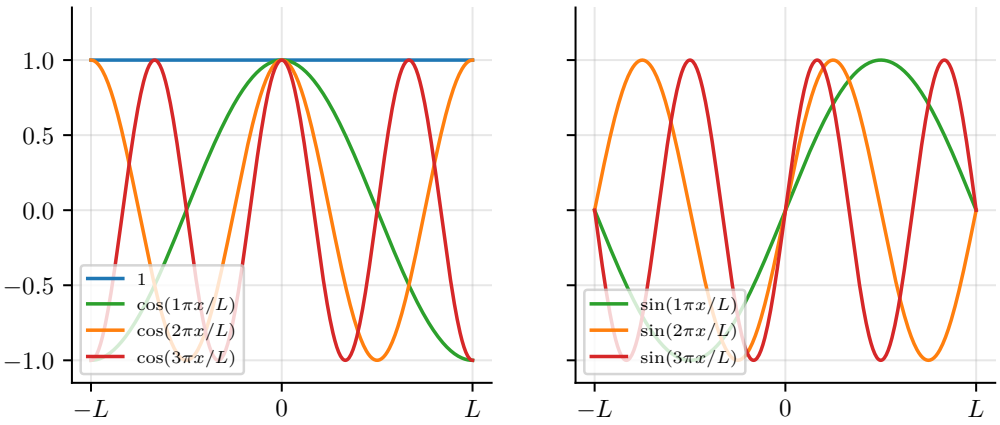

그림 1: $n = 0, \ldots, 3$의 고유함수 ($L = 1$). 모두 $x = \pm L$에서 값과 기울기가 같다.