

측면 열손실과 열원을 갖는 열방정식의 일반해

유한 사인 변환과 Green 함수

공학수학 II · 강의노트 §12.10 Example 풀이

1 문제

다음 일반 문제를 푼다 ($\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, f 는 주어진 함수).

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx} - \beta u + f(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$-\beta u$ 는 측면을 통한 열손실(주위 온도 0), $f(x, t)$ 는 내부 열원이다. PDE가 비동차이므로 변수분리를 바로 쓸 수 없다. 그러나 경계조건이 Dirichlet 동차 조건이므로 유한 사인 변환을 쓰면 PDE가 각 n 에 대한 상미분방정식으로 바뀐다.

2 유한 사인 변환

x 에 대한 유한 사인 변환과 그 역변환은

$$U_n(t) = \mathcal{F}_s[u] = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin n\pi x \, dx, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin n\pi x. \quad (2.1)$$

필요한 성질은 다음과 같다 ($L = 1$).

$$\mathcal{F}_s[u_t] = \frac{dU_n}{dt}, \quad \mathcal{F}_s[u_{xx}] = -(n\pi)^2 U_n + 2n\pi [u(0, t) - (-1)^n u(1, t)] = -(n\pi)^2 U_n. \quad (2.2)$$

경계값이 0이므로 경계항이 사라진다. 이것이 이 문제에서 사인 변환을 쓰는 이유이다.

3 변환된 문제와 해

PDE와 초기조건을 변환하면, $F_n(t) = \mathcal{F}_s[f] = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin n\pi x \, dx$ 로 두어

$$\frac{dU_n}{dt} + \kappa_n U_n = F_n(t), \quad U_n(0) = 0, \quad \kappa_n = \alpha(n\pi)^2 + \beta. \quad (3.1)$$

1계 선형 ODE이므로 적분인자 $e^{\kappa_n t}$ 를 곱하면

$$U_n(t) = \int_0^t e^{-\kappa_n(t-\tau)} F_n(\tau) \, d\tau. \quad (3.2)$$

최종 해

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-(\alpha n^2 \pi^2 + \beta)(t-\tau)} F_n(\tau) \, d\tau \right] \sin n\pi x, \quad F_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin n\pi x \, dx. \quad (3.3)$$

3.1 Green 함수 형태

F_n 의 정의를 대입하고 합과 적분의 순서를 바꾸면

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad G(x, \xi, s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha n^2 \pi^2 + \beta)s} \sin n\pi x \sin n\pi \xi. \quad (3.4)$$

$G(x, \xi, s)$ 는 시각 τ 에 점 ξ 에서 순간적으로 넣은 단위 열량에 대한 응답이다. 해는 이 응답들을 모든 ξ 와 τ 에 대해 더한 것이다(중첩 원리, §12.11). 또한 $G = e^{-\beta s} G_0$ 이고, G_0 은 $\beta = 0$ 일 때의 Green 함수이다. 이는 §12.8의 변환 $u = e^{-\beta t} w$ 와 같은 내용이다. 측면 열손실은 모든 모드의 감쇠율을 똑같이 β 만큼 높인다.

4 구체적인 예: 균일한 열원 $f = 1$

$f \equiv 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$ 인 경우를 계산해 보자. $F_n = 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$, 즉 홀수 n 에서 $4/(n\pi)$ 이고 짝수 n 에서 0이다. F_n 이 상수이므로

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ 홀수}} \frac{4}{n\pi} \frac{1 - e^{-\kappa_n t}}{\kappa_n} \sin n\pi x. \quad (4.1)$$

4.1 정상해와의 비교

$t \rightarrow \infty$ 이면 $u \rightarrow S(x)$ 이고, S 는 $\alpha S'' - \beta S + 1 = 0$, $S(0) = S(1) = 0$ 의 해이다. $m = \sqrt{\beta/\alpha}$ 로 두면

$$S(x) = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{\cosh m(x - \frac{1}{2})}{\cosh \frac{m}{2}} \right]. \quad (4.2)$$

식 (4.1)에서 $t \rightarrow \infty$ 로 보낸 급수는 이 닫힌 형태로 수렴한다. 계수가 $O(n^{-3})$ 로 줄어들어 수렴이 빠르다(표 1). 가장 느린 모드의 시간상수는 $1/\kappa_1 = 1/(\pi^2 + 4) \approx 0.072$ 이므로, $t \approx 0.3$ 이면 사실상 정상상태에 이른다(그림 1).

표 1: $x = 1/2$ 에서 정상해 급수의 수렴 ($\alpha = 1$, $\beta = 4$, $S(1/2) = 0.08798643$)

n 의 최대값 N	$\sum_{n \leq N} U_n(\infty) \sin \frac{n\pi}{2}$	$ \cdot - S(1/2) $
1	0.09180071	3.8×10^{-3}
3	0.08722860	7.6×10^{-4}
5	0.08824418	2.6×10^{-4}
11	0.08795064	3.6×10^{-5}
21	0.08799241	6.0×10^{-6}
51	0.08798597	4.6×10^{-7}

4.2 β 의 영향

β 가 커질수록 측면으로 빠져나가는 열이 많아져 정상온도가 낮아진다. 또 막대 가운데에서 온도가 거의 일정한 값 $1/\beta$ 에 가까워진다(그림 2). 반대로 $\beta = 0$ 이면 $S = x(1 - x)/2$ 이다. 이때 열은 양 끝으로만 빠져나간다.

4.3 수치 검증

식 (1.1)를 유한차분(격자 201개)으로 풀어 급수해와 비교하였다(표 2). 최대 오차는 10^{-6} 이하이다.

비고. (i) 열원이 시간에 무관하면 ($f = f(x)$) $U_n(t) = F_n(1 - e^{-\kappa_n t})/\kappa_n$ 이다. (ii) 열원이 주기적이면, 예를 들어 $f = g(x) \cos \omega t$ 이면, 충분한 시간이 지난 뒤 각 모드가 진동수 ω 로 응답한다. 이때 진폭은 $|F_n|/\sqrt{\kappa_n^2 + \omega^2}$ 로, 감쇠율이 큰 높은 모드일수록 작다. (iii) 초기조건이 0이 아니면 $U_n(0) = 2 \int_0^1 u(x, 0) \sin n\pi x dx$ 가 되어 $U_n(t)$ 에 $U_n(0)e^{-\kappa_n t}$ 가 더해진다(§12.9 참조).

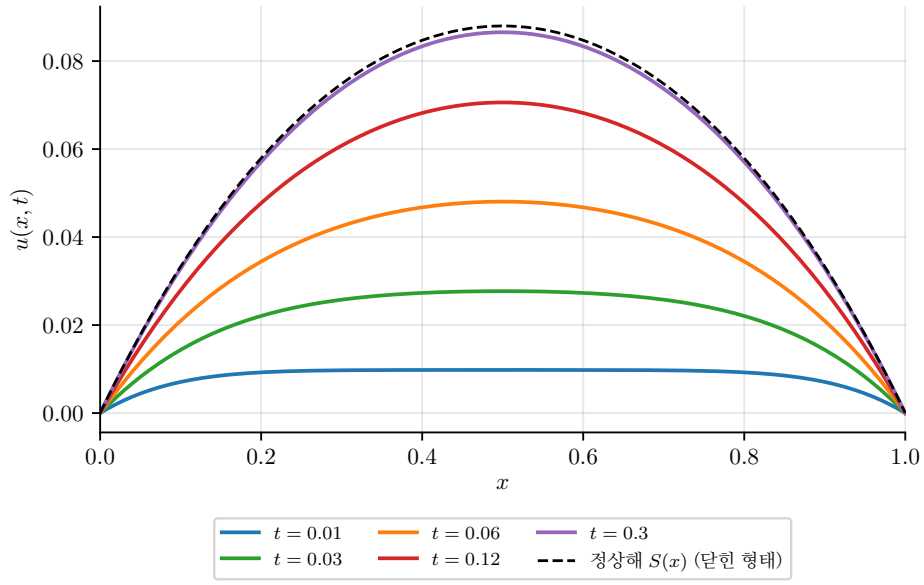


그림 1: $f = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$ 일 때의 온도 분포. 급수해(실선)가 닫힌 형태의 정상해(점선)로 다가간다.

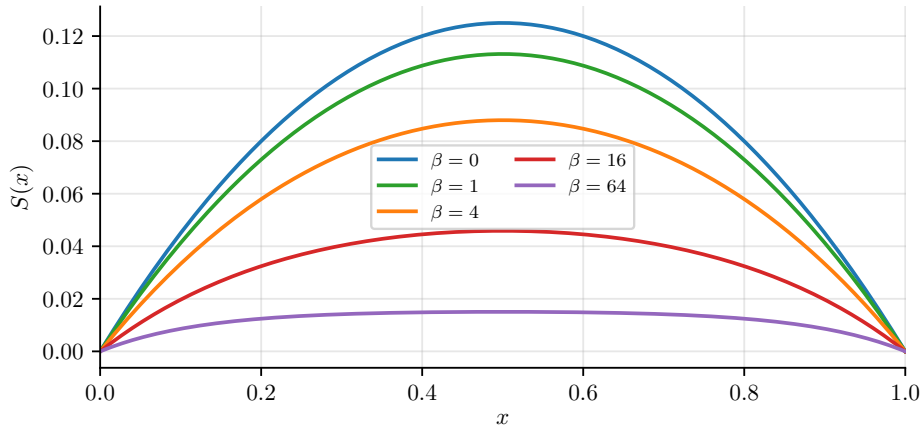


그림 2: β 에 따른 정상해 ($f = 1$, $\alpha = 1$).

표 2: 급수해와 유한차분 수치해의 비교 ($f = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$)

t	$u(0.5, t)$ 급수해	$u(0.5, t)$ 수치해	$\max u_{\text{FD}} - u $
0.02	0.019131	0.019131	4.9×10^{-7}
0.1	0.065052	0.065051	8.4×10^{-7}
0.3	0.086555	0.086554	5.9×10^{-7}
1	0.087986	0.087986	5.2×10^{-7}