

중첩 원리에 의한 초기-경계값 문제의 분해

열원, 두 경계, 초기조건의 효과를 하나씩 분리하기

공학수학 II · 강의노트 §12.11 Example 풀이

1 문제

다음 문제의 해가 네 초기-경계값 문제의 해의 합이 되도록 네 문제를 찾는다.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \phi(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

이 문제에는 해를 만들어 내는 “입력”이 네 개 있다. 열원 f , 왼쪽 경계값 g_1 , 오른쪽 경계값 g_2 , 초기온도 ϕ 이다. PDE와 경계조건, 초기조건이 모두 u 에 대해 선형이므로, 입력을 하나씩만 남기고 나머지를 0으로 둔 문제들의 해를 더하면 원래 문제의 해가 된다.

2 분해

네 개의 부분 문제

(P ₁) 열원만:	$u_t = u_{xx} + f(x, t),$	$u(0, t) = 0,$	$u(1, t) = 0,$	$u(x, 0) = 0,$
(P ₂) 왼쪽 경계만:	$u_t = u_{xx},$	$u(0, t) = g_1(t),$	$u(1, t) = 0,$	$u(x, 0) = 0,$
(P ₃) 오른쪽 경계만:	$u_t = u_{xx},$	$u(0, t) = 0,$	$u(1, t) = g_2(t),$	$u(x, 0) = 0,$
(P ₄) 초기조건만:	$u_t = u_{xx},$	$u(0, t) = 0,$	$u(1, t) = 0,$	$u(x, 0) = \phi(x).$

각 문제의 해를 u_1, u_2, u_3, u_4 라 하면 $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

확인. $u = \sum u_k$ 로 두면

- PDE: $u_t - u_{xx} = \sum_k (u_{k,t} - u_{k,xx}) = f + 0 + 0 + 0 = f$.
- $x = 0$: $u(0, t) = 0 + g_1 + 0 + 0 = g_1$. $x = 1$: $u(1, t) = 0 + 0 + g_2 + 0 = g_2$.
- $t = 0$: $u(x, 0) = 0 + 0 + 0 + \phi = \phi$.

분해 방법은 이것 하나만 있는 것이 아니다. 예를 들어 g_1 과 g_2 를 한 문제에 같이 두면 세 문제로 나눌 수도 있다. 그러나 입력마다 한 문제씩 두면 각 부분 문제가 이미 배운 표준형이 되어 풀기가 쉽다.

3 각 부분 문제의 풀이법

(P₄): 변수분리 (§12.5).

$$u_4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin n\pi x \, dx.$$

(P₁): 고유함수 전개 / 유한 사인 변환 (§12.9, §12.10).

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} F_n(\tau) \, d\tau \right] \sin n\pi x, \quad F_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin n\pi x \, dx.$$

(P₂), (P₃): 경계 이동 또는 Duhamel 원리. 경계값을 직선으로 이어 주는 함수를 빼면 경계조건이 동차가 된다 (§12.7). 예를 들어 (P₃)에서 $u_3 = g_2(t)x + v$ 로 두면

$$v_t = v_{xx} - g_2'(t)x, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad v(x, 0) = -g_2(0)x,$$

이므로 (P₁), (P₄)와 같은 형태가 된다. (P₂)는 $u_2 = g_1(t)(1-x) + v$ 로 놓고 같은 방법으로 푼다. 또는 Duhamel 원리 (§12.17)를 쓸 수 있다. $w(x, t)$ 를 $w(1, t) = 1$ 인 기본 문제의 해라 하면

$$w = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x, \quad u_3 = \int_0^t w(x, t-\tau) g_2'(\tau) d\tau + w(x, t) g_2(0),$$

이고, u_2 는 대칭성에 의해 $w(1-x, t)$ 와 g_1 로 같은 꼴로 쓸 수 있다.

4 수치 예시

분해가 실제로 성립하는지 다음 입력으로 확인한다.

$$f = 1, \quad g_1(t) = \sin 2\pi t, \quad g_2(t) = 1 - e^{-5t}, \quad \phi(x) = \sin \pi x.$$

네 부분해를 각각 위의 방법(모드 200개)으로 계산하고, 원래 문제 (1.1)를 유한차분으로 직접 풀어 $t = 0.3$ 에서 비교하였다(그림 1, 표 1). 네 부분해의 합과 직접 수치해의 차이는 최대 1.2×10^{-6} 이다.

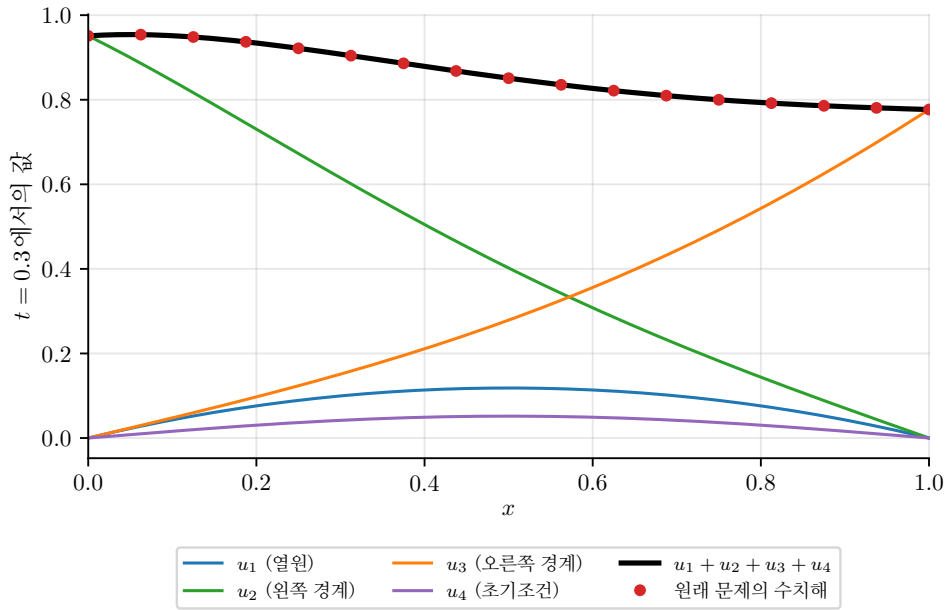


그림 1: $t = 0.3$ 에서 네 부분해와 그 합. 점은 원래 문제를 직접 푼 수치해이다.

표 1: $t = 0.3$ 에서 부분해와 합, 직접 수치해의 비교

x	u_1	u_2	u_3	u_4	합	수치해
0	0.00000	0.95106	0.00000	0.00000	0.95106	0.95106
0.25	0.08903	0.67252	0.12352	0.03661	0.92167	0.92167
0.5	0.11832	0.40204	0.27881	0.05177	0.85094	0.85094
0.75	0.08903	0.18233	0.49192	0.03661	0.79988	0.79988
1	0.00000	0.00000	0.77687	0.00000	0.77687	0.77687

각 부분해의 성격도 그림에서 읽을 수 있다. u_4 는 초기온도를 기억하는 부분으로 $e^{-\pi^2 t}$ 로 빠르게 사라진다. u_2, u_3 은 경계값을 따라가는 부분이고, u_1 은 열원이 계속 공급하는 부분이다.

비고. (i) 중첩 원리는 선형 문제에서만 성립한다. 예를 들어 PDE에 u^2 같은 비선형 항이 있으면 부분해들의 합은 해가 되지 않는다. (ii) $\phi(0) \neq g_1(0)$ 이면 $t = 0, x = 0$ 에서 경계조건과 초기조건이 맞지 않는다. 이 경우에도 $t > 0$ 에서는 해가 존재하지만, 급수가 모서리 근처에서 느리게 수렴한다. 위의 예에서는 $\phi(0) = g_1(0) = 0$, $\phi(1) = g_2(0) = 0$ 이 되도록 입력을 골랐다.