

비동차 경계조건과 열원을 갖는 열방정식의 풀이

정상해와 과도해로의 분리

공학수학 II · 강의노트 §12.11 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \sin 3\pi x, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 1, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

PDE(열원 $\sin 3\pi x$)와 경계조건($u(1, t) = 1$)이 모두 비동차이다. 열원과 경계값이 시간에 무관하므로, 해를

$$u(x, t) = S(x) + w(x, t) \quad (1.2)$$

로 나눈다. S 는 열원과 경계조건을 모두 떠맡는 정상해이고, w 는 동차 문제를 만족하는 과도해이다.

2 정상해 $S(x)$

S 는 $S'' + \sin 3\pi x = 0$, $S(0) = 0$, $S(1) = 1$ 을 만족한다. 두 번 적분하면

$$S(x) = \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2} + Ax + B.$$

$S(0) = B = 0$ 이고, $S(1) = A = 1$ 이므로 ($\sin 3\pi = 0$)

$$S(x) = x + \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2}. \quad (2.1)$$

첫째 항 x 는 경계값 0과 1을 잇는 직선이고, 둘째 항은 열원에 의한 온도 상승이다.

3 과도해 $w(x, t)$

$w = u - S$ 를 (1.1)에 대입하면 열원과 경계값이 모두 사라진다.

$$w_t = w_{xx}, \quad w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad w(x, 0) = \sin \pi x - x - \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2}. \quad (3.1)$$

변수분리의 해 $w = \sum b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$ 에서 b_n 은 $w(x, 0)$ 의 사인 계수이다. $\sin \pi x$ 와 $\sin 3\pi x$ 는 이미 사인 급수의 한 항이고, x 의 사인 급수는

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x \quad (0 \leq x < 1) \quad (3.2)$$

이므로

$$w(x, 0) = \sin \pi x - \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x. \quad (3.3)$$

최종 해

$$u(x, t) = x + \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2} + e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2} \sin 3\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \quad (3.4)$$

검산. S 는 정상 문제를 만족하고 w 의 각 항은 동차 열방정식과 동차 경계조건을 만족한다. 따라서 $u = S + w$ 는 PDE와 경계조건을 만족한다. $t = 0$ 에서는 x 와 급수 항이 서로 지워지고 $\pm \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2}$ 도 지워져 $u(x, 0) = \sin \pi x$ 가 된다 ($0 \leq x < 1$).

4 해의 성질

4.1 시간에 따른 변화

그림 1에서 처음 $\sin \pi x$ 였던 온도가 정상해 $S(x)$ 로 옮겨 가는 모습을 볼 수 있다. t 가 작을 때 변화는 $x = 1$ 근처에 집중된다. 그곳에서 경계온도 1이 안쪽으로 퍼져 들어오기 때문이다. 가장 느린 모드의 시간상수는 $1/\pi^2 \approx 0.10$ 이므로 $t \approx 0.5$ 에서 사실상 정상상태에 이른다.

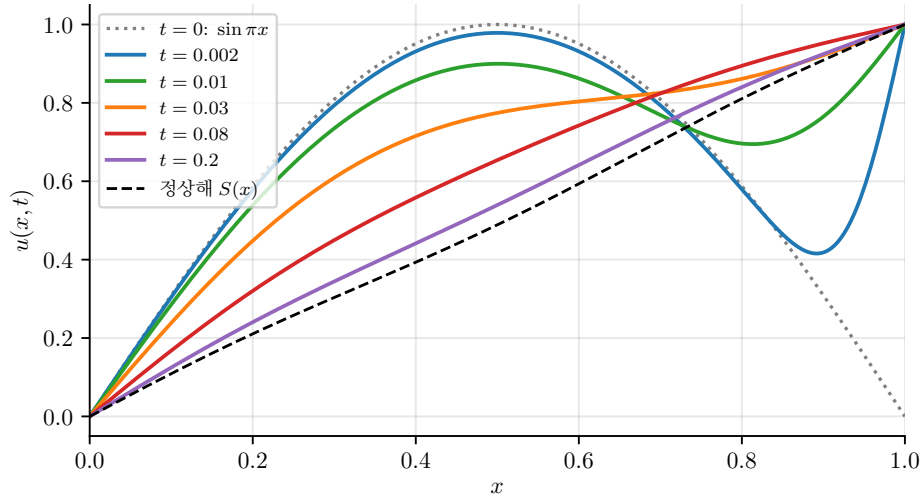


그림 1: 시간에 따른 온도 분포. 점선은 정상해 $S(x) = x + \sin(3\pi x)/(9\pi^2)$ 이다.

4.2 $x = 1$ 에서의 불일치와 급수의 수렴

초기조건은 $u(1, 0) = \sin \pi = 0$ 인데 경계조건은 $u(1, t) = 1$ 이다. 이 불일치 때문에 $w(x, 0)$ 의 사인 계수가 $O(1/n)$ 로 느리게 줄어든다. $t > 0$ 이면 각 항에 $e^{-n^2\pi^2 t}$ 가 곱해지므로 급수가 빠르게 수렴한다. 그러나 t 가 아주 작을 때는 많은 항이 필요하다(표 1).

표 1: $x = 0.9$ 에서 급수의 오차가 처음으로 10^{-6} 아래로 내려가는 항 수(대략적인 값)

t	$u(0.9, t)$	오차 $< 10^{-6}$ 에 필요한 항 수
0.0001	0.308793	86
0.001	0.332104	28
0.01	0.764836	9
0.1	0.947324	3

4.3 수치 검증

문제 (1.1)를 유한차분(격자 401개)으로 풀어 급수해와 비교하였다(표 2).

표 2: 급수해와 유한차분 수치해의 비교

t	$u(0.5, t)$ 급수해	$u(0.5, t)$ 수치해	$\max u_{\text{FD}} - u $
0.01	0.899798	0.899799	8.9×10^{-6}
0.05	0.713217	0.713219	3.0×10^{-6}
0.1	0.624208	0.624209	2.1×10^{-6}
0.5	0.491355	0.491355	5.7×10^{-7}

비고. 이 해는 중첩 원리 (§12.11)로 다음 세 부분의 합으로도 볼 수 있다. 열원에 의한 부분 $\frac{1-e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2} \sin 3\pi x$, 경계값 1에 의한 부분 $x + \sum \frac{2(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$, 그리고 초기조건에 의한 부분 $e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ 이다. 열원 $\sin 3\pi x$ 가 고유함수 하나와 같기 때문에 열원에 의한 부분은 모드 하나만으로 표현된다.