

단열 경계를 갖는 반무한 영역의 열전도

Fourier 코사인 변환과 오차함수로의 닫힌 해

공학수학 II · 강의노트 §12.14 Example 풀이

1 문제

$H(x)$ 를 Heaviside 함수라 할 때, 다음 문제를 코사인 변환으로 푼다.

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u_x(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= H(1 - x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, & 0 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$x = 0$ 이 단열된 반무한 막대에서 처음에 $0 \leq x < 1$ 부분만 온도 1로 데워져 있는 상황이다. 경계에서 기울기 $u_x(0, t)$ 가 주어졌으므로 코사인 변환을 쓴다. 코사인 변환의 u_{xx} 공식에는 $u_x(0, t)$ 만 나타나기 때문이다 (사인 변환에는 $u(0, t)$ 가 나타난다).

2 코사인 변환

강의노트의 정의를 따른다.

$$\mathcal{F}_c[f] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx, \quad f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \cos \omega x \, d\omega, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}_c[u_{xx}] = -\frac{2}{\pi} u_x(0, t) - \omega^2 \mathcal{F}_c[u] = -\omega^2 U(\omega, t). \quad (2.2)$$

초기조건의 변환은

$$\mathcal{F}_c[H(1 - x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (2.3)$$

3 변환된 문제와 역변환

$U(\omega, t) = \mathcal{F}_c[u]$ 로 두면 PDE는 ω 를 매개변수로 하는 ODE가 된다.

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha \omega^2 U, \quad U(\omega, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} \implies U(\omega, t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\alpha \omega^2 t}. \quad (3.1)$$

역변환하면 적분 표현을 얻는다.

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\alpha \omega^2 t} \cos \omega x \, d\omega. \quad (3.2)$$

4 닫힌 형태로의 계산

$\sin \omega \cos \omega x = \frac{1}{2} [\sin \omega(1 + x) + \sin \omega(1 - x)]$ 을 쓰면, 다음 적분 하나만 알면 된다.

$$I(c) = \int_0^\infty \frac{\sin c\omega}{\omega} e^{-a\omega^2} d\omega \quad (a > 0). \quad (4.1)$$

c 로 미분하면 Gauss 적분 $\int_0^\infty \cos(c\omega) e^{-a\omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/a} e^{-c^2/4a}$ 가 되고, $I(0) = 0$ 이므로

$$I(c) = \int_0^c \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a} ds = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{a}}\right), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds. \quad (4.2)$$

$a = \alpha t$, $c = 1 \pm x$ 를 대입하면 다음을 얻는다(erf는 홀함수이므로 $x > 1$ 이어도 그대로 성립한다).

최종 해

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\alpha \omega^2 t} \cos \omega x d\omega = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] \quad (4.3)$$

적분 표현 (3.2)를 수치적분한 값과 닫힌 형태의 값은 소수 8자리까지 일치한다(표 1).

표 1: 적분 표현과 닫힌 형태의 비교 ($\alpha = 1$)

t	x	적분 표현 (수치적분)	닫힌 형태 (erf)
0.1	0	0.97465268	0.97465268
0.1	0.5	0.86782565	0.86782565
0.1	1	0.49999613	0.49999613
0.1	2	0.01267366	0.01267366
1	0	0.52049988	0.52049988
1	0.5	0.49374101	0.49374101
1	1	0.42135040	0.42135040
1	2	0.22280263	0.22280263

5 해의 해석

5.1 짝함수 확장(영상법)과의 관계

초기조건을 $x < 0$ 으로 짝함수 확장하면 $u(x, 0) = H(1 - |x|)$, 즉 $-1 < x < 1$ 에서 1인 함수가 된다. 무한 영역의 해 (§12.13, Green 함수와의 합성곱)는

$$u(x, t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} e^{-(x-\xi)^2/4\alpha t} d\xi = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\frac{1+x}{2\sqrt{\alpha t}} + \operatorname{erf}\frac{1-x}{2\sqrt{\alpha t}} \right], \quad (5.1)$$

이고 결과가 같다. 짝함수 확장한 해는 x 에 대해 짝함수이므로 저절로 $u_x(0, t) = 0$ 을 만족한다. 단열 경계는 “거울에 비친 같은 열원”이 있는 것과 같은 효과를 낸다.

5.2 검산과 성질

- $t \rightarrow 0^+$: $0 \leq x < 1$ 이면 두 erf의 인자가 모두 $+\infty$ 로 가서 $u \rightarrow 1$, $x > 1$ 이면 $u \rightarrow \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$ 이다. $x = 1$ 에서는 $u \rightarrow \frac{1}{2}$ 이다.
- $u_x(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} [e^{-1/4\alpha t} - e^{-1/4\alpha t}] = 0$ 이므로 단열 경계조건을 만족한다.
- 열량 보존: $\frac{d}{dt} \int_0^\infty u dx = \alpha [u_x]_0^\infty = 0$ 이므로 $\int_0^\infty u dx = \int_0^1 1 dx = 1$ 이 모든 시간에 유지된다(표 2).
- 긴 시간에는 $\operatorname{erf}(z) \approx 2z/\sqrt{\pi}$ 를 써서 $u(0, t) \approx 1/\sqrt{\pi\alpha t}$ 이다. 열량 1이 $\sqrt{\alpha t}$ 정도의 폭으로 퍼지므로 높이는 $t^{-1/2}$ 로 줄어든다(그림 2).

표 2: 총 열량과 $x = 0$ 에서의 온도 ($\alpha = 1$)

t	$\int_0^\infty u dx$	$u(0, t)$	$1/\sqrt{\pi\alpha t}$
0.1	1.000000	0.974653	1.784124
1	1.000000	0.520500	0.564190
10	1.000000	0.176937	0.178412
100	1.000000	0.056372	0.056419

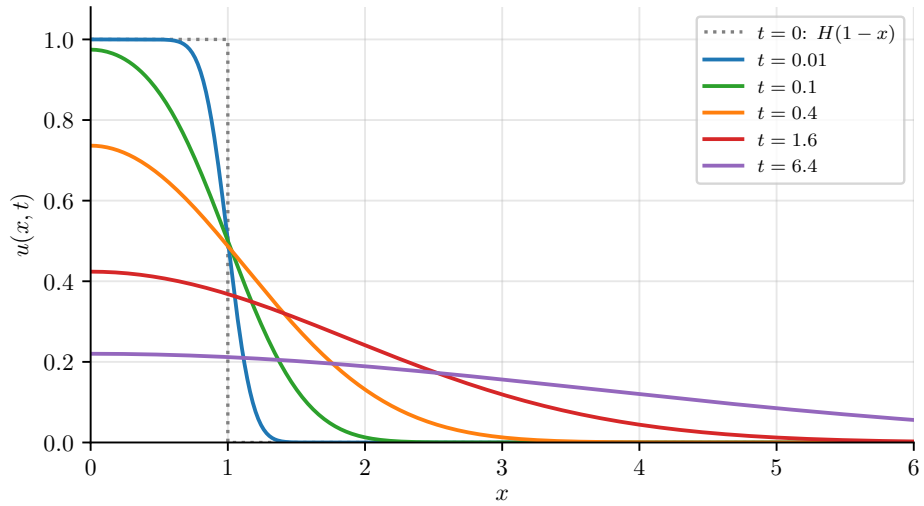


그림 1: 온도 분포 ($\alpha = 1$). $x = 0$ 에서 기울기가 0이고, 곡선 아래 넓이(총 열량)는 항상 1이다.

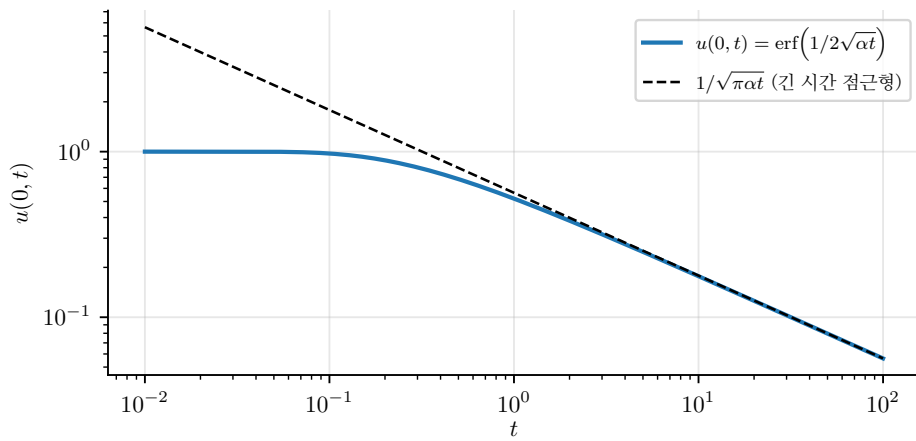


그림 2: 단열 벽면의 온도 $u(0, t)$ 와 긴 시간 점근형 $1/\sqrt{\pi\alpha t}$.

비고. 경계가 단열($u_x = 0$)이 아니라 온도 0으로 고정($u = 0$)되어 있다면 사인 변환을 써야 한다. 그 경우는 홀함수 확장(거울에 비친 음의 열원)에 해당하고, 해는 $\text{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \frac{1}{2}[\text{erf}\frac{x+1}{2\sqrt{\alpha t}} + \text{erf}\frac{x-1}{2\sqrt{\alpha t}}]$ 가 된다($x = 0$ 에서 0). 이때는 열이 벽으로 빠져나가 총 열량이 줄어든다.