# 단열 경계를 갖는 열방정식의 풀이

코사인 고유함수 전개와 열량 보존

공학수학 II · 강의노트 §12.5 Example 풀이

## 1 문제

양 끝이 단열된 막대에서 다음 초기–경계값 문제를 푼다.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0<x<1,\ 0<t<\infty,\\ u_x(0,t)&=0,\quad u_x(1,t)=0, && 0<t<\infty,\\ u(x,0)&=1+\cos\pi x+0.5\cos 3\pi x, && 0\le x\le 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

경계조건은 Neumann(2종) 조건으로, 경계를 통한 열유속 $-k\,u_x$가 0임을, 즉 막대 양 끝이 단열되어 있음을 뜻한다. PDE와 경계조건이 모두 선형 동차이므로 변수분리법을 그대로 적용할 수 있다.

## 2 변수분리

$u=X(x)T(t)$를 대입하고 분리상수를 $-\lambda$로 두면

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda \quad\Longrightarrow\quad T'+\lambda T=0, \qquad \boxed{X''+\lambda X=0,\quad X'(0)=0,\quad X'(1)=0} \tag{2.1}$$

## 3 고유값 문제

- $\lambda=-k^2<0$: $X=A\cosh kx+B\sinh kx$. $X'(0)=Bk=0\Rightarrow B=0$, $X'(1)=Ak\sinh k=0\Rightarrow A=0$. 자명해뿐이다.
- $\lambda=0$: $X=A+Bx$. $X'(0)=X'(1)=B=0$이므로 $X=A$ (상수). $\lambda_0=0$**은 고유값**이고 고유함수는 $X_0=1$이다.
- $\lambda>0$: $X=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$. $X'(0)=C_2\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow C_2=0$, $X'(1)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}=n\pi$.

따라서

$$\lambda_n=(n\pi)^2, \qquad X_n(x)=\cos n\pi x, \qquad T_n(t)=e^{-n^2\pi^2 t}, \qquad n=0,1,2,\dots \tag{3.1}$$

Dirichlet 문제($u(0,t)=u(1,t)=0$)와 달리 $n=0$인 상수 모드가 존재한다는 점이 핵심이다. 이 모드는 감쇠하지 않는다($T_0=1$).

## 4 해의 일반형과 계수

고유함수들을 중첩하면

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x, \qquad a_n=2\int_0^1 u(x,0)\cos n\pi x\,dx. \tag{4.1}$$

초기조건 $1+\cos\pi x+0.5\cos 3\pi x$는 이미 코사인 급수의 형태이므로, 직교성 $\int_0^1\cos m\pi x\cos n\pi x\,dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$ $(m,n\ge 1)$에 의해 적분을 계산할 필요 없이

$$\frac{a_0}{2}=1, \qquad a_1=1, \qquad a_3=0.5, \qquad a_n=0\ \ (n\neq 0,1,3). \tag{4.2}$$

**최종 해**

$$u(x,t) = 1 + e^{-\pi^2 t}\cos \pi x + 0.5\, e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x \tag{4.3}$$

검산: $u_t = u_{xx}$는 각 항에서 성립하고, $u_x = -\pi e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - 1.5\pi e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x$는 $x = 0, 1$에서 0이며, $t = 0$에서 초기조건과 일치한다.

# 5 해의 성질

## 5.1 열량 보존과 정상상태

PDE를 $[0,1]$에서 적분하면

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u\,dx = \int_0^1 u_{xx}\,dx = u_x(1,t) - u_x(0,t) = 0. \tag{5.1}$$

단열 막대에서는 총 열량이 보존된다. 따라서 $t \to \infty$의 정상상태는 초기온도의 **평균값** $\int_0^1 u(x,0)\,dx = 1$이며, 이는 상수 모드 $a_0/2$와 정확히 같다. (코사인 항의 적분은 모두 0이다.)

## 5.2 감쇠 속도

모드 $n$은 $e^{-n^2\pi^2 t}$로 감쇠하므로 모드 3은 모드 1보다 9배 빨리 사라진다(그림 2). 가장 느린 모드의 시간상수는 $\tau_1 = 1/\pi^2 \approx 0.101$이고, 온도 편차가 처음의 1 % 이하가 되는 시간은 $t = \ln 100/\pi^2 \approx 0.467$이다. $t \gtrsim 0.05$ 이후에는 사실상 $u \approx 1 + e^{-\pi^2 t}\cos \pi x$로, 온도가 한쪽은 높고 한쪽은 낮은 형태로 평균값에 다가간다(그림 1).

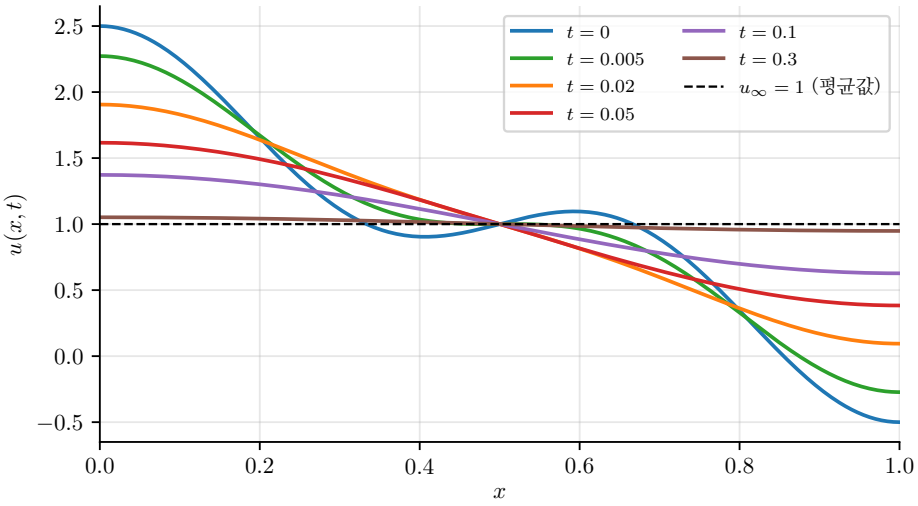


**그림 1:** 시간에 따른 온도 분포. 양 끝에서 기울기가 0(단열)이며, 모든 곡선은 평균값 1로 수렴한다.

## 5.3 수치 검증

같은 문제를 유한차분(격자 201개, 경계에서는 가상점으로 $u_x = 0$ 처리)으로 풀어 해석해와 비교하였다(표 1). 수치해의 총 열량은 모든 시간에서 1을 유지하고, 해석해와의 최대 오차는 $10^{-5}$ 수준이다.

**비고.** (i) 같은 초기조건을 Dirichlet 조건 $u(0,t) = u(1,t) = 0$으로 풀면 열이 양 끝으로 빠져나가 $u \to 0$이 된다. 경계조건의 종류가 고유값($n = 0$의 존재 여부)을 바꾸고, 그 결과 정상상태가 달라진다. (ii) 초기조건이 고유함수들의 유한 합이면 계수 적분을 할 필요 없이 바로 답을 쓸 수 있다. 일반적인 $\phi(x)$에 대해서는 $a_n = 2\int_0^1 \phi(x)\cos n\pi x\,dx$를 계산한다.

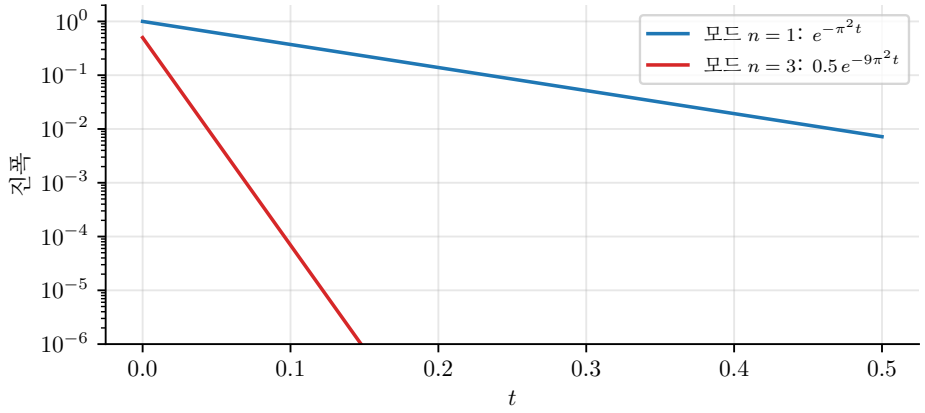


**그림 2:** 모드별 진폭의 감쇠(로그 눈금). 기울기는 각각 $-\pi^2$, $-9\pi^2$ 이다.

**표 1:** 해석해와 유한차분 수치해의 비교

| $t$ | $u(0,t)$ | $u(1,t)$ | $\int_0^1 u\,dx$ (수치해) | $\max\lvert u_{\mathrm{FD}}-u\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 2.11170 | −0.11170 | 1.000000 | $3.6\times10^{-5}$ |
| 0.05 | 1.61639 | 0.38361 | 1.000000 | $1.1\times10^{-5}$ |
| 0.1 | 1.37278 | 0.62722 | 1.000000 | $7.7\times10^{-6}$ |
| 0.3 | 1.05177 | 0.94823 | 1.000000 | $3.2\times10^{-6}$ |