

Robin 경계조건을 갖는 열방정식의 풀이

고유값 문제 $X'' + \lambda X = 0$ 의 해석과 고유값 λ_n 의 성질

1 문제

다음 초기-경계값 문제를 푼다 ($\alpha > 0, h > 0$).

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= 1, & 0 < t < \infty, \\ u_x(1, t) + h u(1, t) &= 1, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \sin \pi x + x, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$x = 1$ 의 조건은 Robin(3종) 조건으로, 열전달 문제에서는 h 가 Biot 수의 역할을 한다. 경계조건이 비동차이므로 $u(x, t) = S(x) + w(x, t)$ 로 정상해 S 와 과도해 w 를 분리한다.

2 정상해 $S(x)$

$S'' = 0$ 에서 $S = A + Bx$. $S(0) = 1 \Rightarrow A = 1$, $S'(1) + hS(1) = 1 \Rightarrow B + h(1 + B) = 1$ 이므로

$$S(x) = 1 + \frac{1-h}{1+h} x. \quad (2.1)$$

3 과도해의 동차 문제

$w = u - S$ 는 다음을 만족한다.

$$w_t = \alpha w_{xx}, \quad w(0, t) = 0, \quad w_x(1, t) + h w(1, t) = 0, \quad (3.1)$$

$$w(x, 0) = \phi(x) \equiv \sin \pi x + x - S(x) = \sin \pi x - 1 + \frac{2h}{1+h} x. \quad (3.2)$$

$w = X(x)T(t)$ 로 놓으면 분리상수를 $-\lambda$ 로 하여

$$\frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \implies T' + \alpha \lambda T = 0, \quad \boxed{X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) + hX(1) = 0} \quad (3.3)$$

4 고유값 문제 $X'' + \lambda X = 0$

4.1 $\lambda \leq 0$ 이면 자명해뿐이다

- $\lambda = 0$: $X = A + Bx$, $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, $X'(1) + hX(1) = B(1 + h) = 0 \Rightarrow B = 0$.
- $\lambda = -k^2 < 0$ ($k > 0$): $X = C \sinh kx$ 이고, 조건은 $k \cosh k + h \sinh k = 0$, 즉 $\tanh k = -k/h$. 좌변은 양수, 우변은 음수이므로 해가 없다.

따라서 비자명해는 $\lambda > 0$ 에서만 존재한다. (이는 §6.2의 Rayleigh 몫으로도 확인된다.)

4.2 $\lambda > 0$: 특성방정식

일반해 $X = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ 에서 $X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ 이므로 $X = \sin \sqrt{\lambda}x$. 우측 조건을 대입하면

$$X'(1) + hX(1) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + h \sin \sqrt{\lambda} = 0 \iff \boxed{\tan \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}} \quad (4.1)$$

이 초월방정식의 양의 근 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ 이 고유값이며, 고유함수는

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad T_n(t) = e^{-\alpha \lambda_n t}. \quad (4.2)$$

4.3 그래프 해석

식 (4.1)의 근은 $s = \sqrt{\lambda}$ 를 가로축으로 하여 $\tan s$ 와 직선 $-s/h$ 의 교점으로 읽을 수 있다 (그림 1). 직선 $-s/h$ 는 $s > 0$ 에서 음수이므로, 교점은 $\tan s < 0$ 인 구간, 곧 $((n - \frac{1}{2})\pi, n\pi)$ 안에 각각 정확히 하나씩 존재한다. 이 구간에서 $\tan s$ 는 $-\infty$ 에서 0으로 단조증가하고 $-s/h$ 는 감소하므로 교점은 유일하다. 따라서

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 < \lambda_n < n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

이 구간은 수치 계산(Brent 법)의 초기 구간으로 그대로 쓸 수 있다.

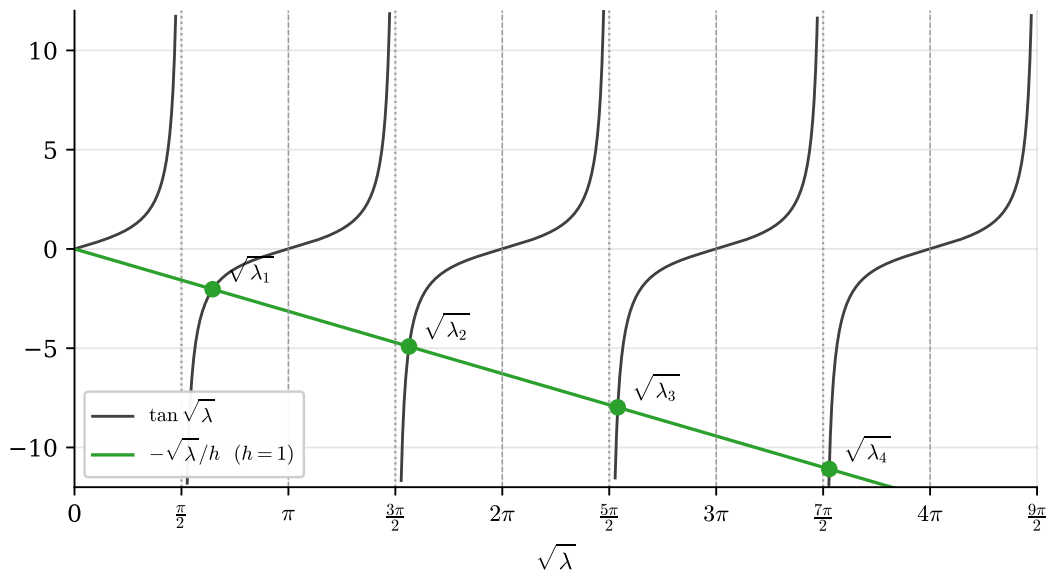


그림 1: 특성방정식 $\tan \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}/h$ 의 그래프 해 ($h = 1$). 점선은 $(n - \frac{1}{2})\pi$, 파선은 $n\pi$. 교점 $\sqrt{\lambda_n}$ 은 n 이 커질수록 $(n - \frac{1}{2})\pi$ 쪽으로 다가간다.

5 고유값의 수치값

식 (4.1)를 구간 (4.3)에서 Brent 법으로 풀었다 (허용오차 10^{-12}).

표 1: 고유값 λ_n

n	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 5$	$h = 10$
1	3.37309	4.11586	5.23920	7.04192	8.19547
2	23.19234	24.13934	25.87742	29.74997	33.18403
3	62.67972	63.65911	65.54787	70.41468	75.83473
4	121.89992	122.88916	124.82936	130.15676	136.95267
5	200.85783	201.85126	203.81425	209.37708	217.07521
6	299.55442	300.55000	302.52494	308.22062	316.51382

표 2: 참고: $\sqrt{\lambda_n}$ (고유함수 $\sin \sqrt{\lambda_n}x$ 의 파수)

n	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 5$	$h = 10$
1	1.836597	2.028758	2.288930	2.653662	2.862773
2	4.815842	4.913180	5.086985	5.454354	5.760558
3	7.917053	7.978666	8.096164	8.391346	8.708314
4	11.040830	11.085538	11.172706	11.408627	11.702678
5	14.172432	14.207437	14.276353	14.469868	14.733472
6	17.307641	17.336378	17.393244	17.556213	17.790835

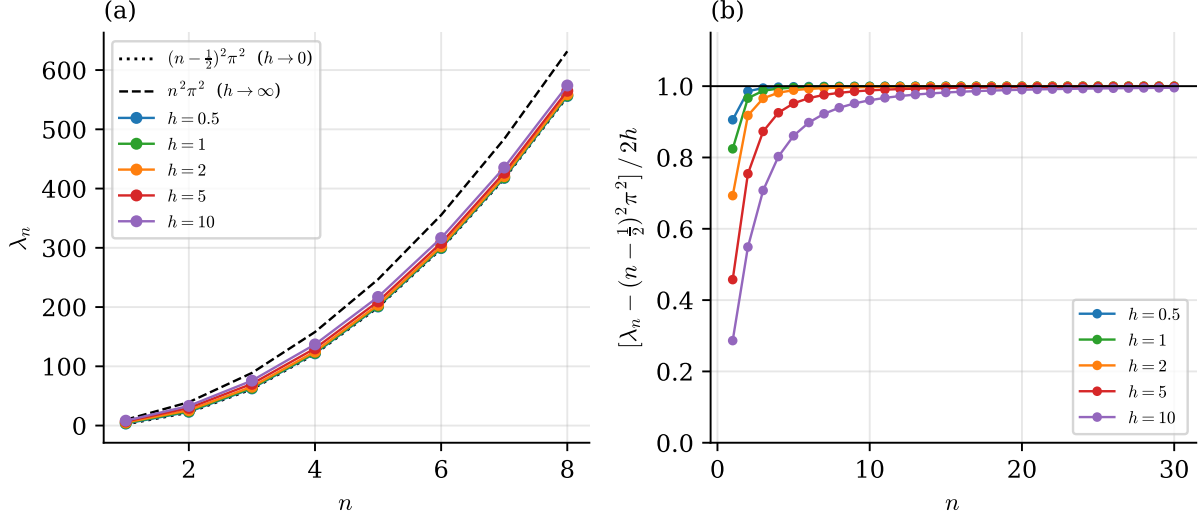


그림 2: (a) n 에 따른 λ_n . 모든 h 에 대해 λ_n 은 하한 $(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$ 와 상한 $n^2 \pi^2$ 사이에 놓이며 n^2 에 비례해 증가한다. (b) $[\lambda_n - (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2] / (2h)$. $n \rightarrow \infty$ 에서 모든 h 에 대해 1로 수렴하여 점근식 (6.1)을 확인한다. h 가 클수록 수렴이 느리다.

6 고유값에 대한 논의

6.1 n 에 대한 점근 거동

$\sqrt{\lambda_n} = (n - \frac{1}{2})\pi + \delta_n$ ($0 < \delta_n < \frac{\pi}{2}$)로 두면 $\tan \sqrt{\lambda_n} = -\cot \delta_n$ 이므로 식 (4.1)는 $\tan \delta_n = h/\sqrt{\lambda_n}$ 가 된다. n 이 크면 $\delta_n \approx h/((n - \frac{1}{2})\pi) \rightarrow 0$ 이고, 제곱하면

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 2h + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

즉 큰 n 에서 λ_n 은 Neumann형 고유값 $(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$ 를 상수 $2h$ 만큼 위로 평행이동한 값이다. $\sqrt{\lambda_n}$ 자체로 보면 $(n - \frac{1}{2})\pi$ 와의 차이는 $h/((n - \frac{1}{2})\pi)$ 로 0에 가지만, λ_n 단위로는 $2h$ 라는 유한한 차이가 남는다는 점에 주의한다. 표 3은 $h = 1$ 에서 이 근사의 정확도를 보여준다. $n = 2$ 부터 오차가 0.3% 이하이다.

표 3: $h = 1$ 에서 점근식 $\lambda_n \approx (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 + 2h$ 의 정확도

n	정확값 λ_n	점근값	상대오차
1	4.11586	4.46740	8.541%
2	24.13934	24.20661	0.279%
3	63.65911	63.68503	0.041%
4	122.88916	122.90265	0.011%
5	201.85126	201.85949	0.004%
6	300.55000	300.55553	0.002%

6.2 Rayleigh 몫과 h 에 대한 단조성

$X'' + \lambda X = 0$ 에 X 를 곱해 $[0, 1]$ 에서 부분적분하고 경계조건 $X(0) = 0$, $X'(1) = -hX(1)$ 을 쓰면

$$\lambda = \frac{\int_0^1 X'^2 dx + h X(1)^2}{\int_0^1 X^2 dx}. \quad (6.2)$$

이로부터 다음을 알 수 있다.

1. $h > 0$ 이면 분자가 양수이므로 모든 고유값은 양수이다. ($\lambda \leq 0$ 의 경우 분석과 일치)
2. 분자가 h 에 대해 증가하므로, min-max 원리에 의해 각 λ_n 은 h 의 증가함수이다. 경계를 통한 열손실이 커질수록(즉 h 가 클수록) 모든 모드가 더 빨리 감쇠한다.
3. 두 극한:
 - $h \rightarrow 0$ (단열, Neumann $X'(1) = 0$): $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ 이므로 $\lambda_n \rightarrow (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$. 작은 h 에서는 $\lambda_n \approx (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 + 2h$.
 - $h \rightarrow \infty$ (Dirichlet $X(1) = 0$): $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ 이므로 $\lambda_n \rightarrow n^2 \pi^2$. 큰 h 에서는 $\sqrt{\lambda_n} \approx n\pi/(1 + 1/h)$, 곧 $\lambda_n \approx n^2 \pi^2 (1 - 2/h)$.

그림 3는 λ_n/π^2 가 h 에 따라 $(n - \frac{1}{2})^2$ 에서 n^2 로 단조 이동하는 모습을 보여준다. 전이는 대략 $h \sim \sqrt{\lambda_n}$ 근방에서 일어나므로, 높은 모드일수록 Dirichlet 극한에 도달하려면 더 큰 h 가 필요하다. 이것이 그림 2(b)에서 h 가 클수록 점근식으로서의 수렴이 느린 이유이다.

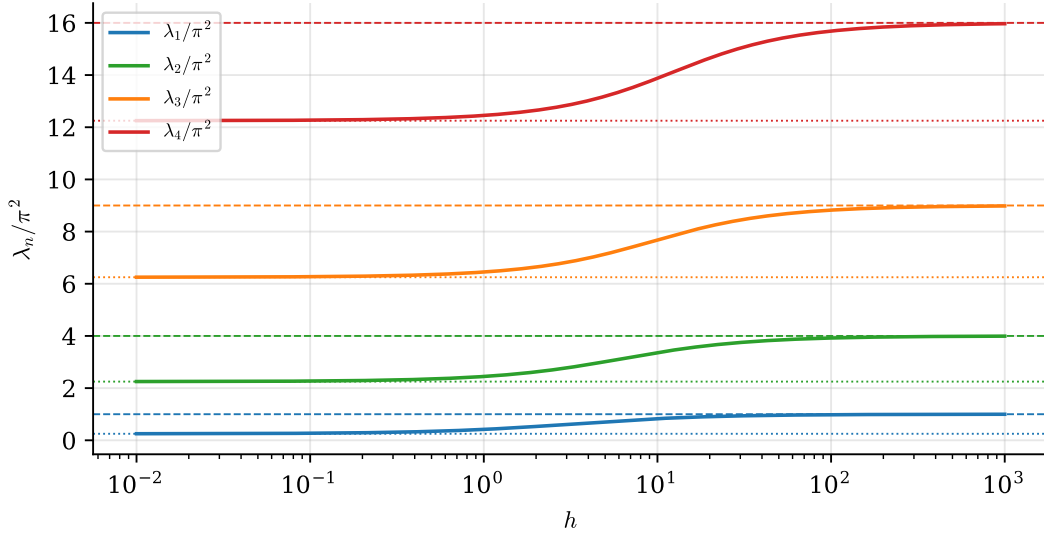


그림 3: h 에 따른 λ_n/π^2 ($n = 1, \dots, 4$). 점선은 $(n - \frac{1}{2})^2$ (Neumann 극한), 파선은 n^2 (Dirichlet 극한).

6.3 직교성

$X'' + \lambda X = 0$ 은 Sturm–Liouville 문제($p = 1, q = 0, r = 1$)이고 두 경계조건이 모두 분리형(separated)이므로 연산자는 자기수반이다. 따라서 고유값은 실수이고 단순하며, 서로 다른 고유값의 고유함수는 직교한다.

$$\int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_m} x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (6.3)$$

고유함수의 파수 $\sqrt{\lambda_n}$ 가 π 의 정수배가 아니므로 이 직교성은 Fourier 사인급수의 직교성과는 별개이며, 특성방정식 (4.1)가 성립할 때만 성립한다. 노름은 (4.1)를 이용해

$$\int_0^1 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\lambda_n + h^2 + h}{2(\lambda_n + h^2)}. \quad (6.4)$$

($\sin^2 \sqrt{\lambda_n} = \lambda_n/(\lambda_n + h^2)$, $\cos \sqrt{\lambda_n} = -(h/\sqrt{\lambda_n}) \sin \sqrt{\lambda_n}$ 을 사용.)

6.4 물리적 의미: 감쇠율과 시간 척도

모드 n 은 $e^{-\alpha \lambda_n t}$ 로 감쇠하므로 $\alpha \lambda_n$ 이 감쇠율이다. 가장 느린 모드의 시간상수는 $\tau_1 = 1/(\alpha \lambda_1)$ 이며, $h = 1$ 이면 $\lambda_1 \approx 4.116$ 으로 $\tau_1 \approx 0.243/\alpha$ 이다. 또한 $\lambda_2/\lambda_1 \approx 5.87$ 이므로 $t \gtrsim \tau_1$ 이후에는 제2모드가 제1모드에 비해 $e^{-4.87t/\tau_1}$ 배로 작아져, 해는 사실상 $u \approx S(x) + a_1 e^{-\alpha \lambda_1 t} \sin \sqrt{\lambda_1} x$ 로 근사된다. h 가 증가하면 λ_1 은 $\pi^2/4 \approx 2.47$ 에서 $\pi^2 \approx 9.87$ 까지 커지므로 정상상태 도달 시간은 최대 4배까지 짧아진다.

6.5 참고: $h < 0$ 인 경우

Rayleigh 몫 (6.2)의 경계항이 음이 되므로 양수성이 보장되지 않는다. $\lambda = 0$ 은 $h = -1$ 일 때 고유값이 되고, $h < -1$ 이면 $\tanh k = -k/h$ 가 양의 근을 가져 음의 고유값 $\lambda_1 = -k^2$ 이 생긴다. 이 모드는 시간에 따라 지수적으로 증가한다(경계에서 열이 유입되는 경우). 본 풀이는 $h > 0$ 을 가정한다.

7 전개 계수와 최종 해

$\phi(x) = \sum a_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$ 의 계수는 $a_n = \int_0^1 \phi X_n dx / \int_0^1 X_n^2 dx$ 이다. 필요한 적분을 (4.1)로 정리하면

$$\int_0^1 \sin \pi x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{\pi \sin \sqrt{\lambda_n}}{\pi^2 - \lambda_n}, \quad \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{h \sin \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n}, \quad (7.1)$$

$$\int_0^1 x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{(1+h) \sin \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n}. \quad (7.2)$$

($\lambda_n \neq \pi^2$ 은 (4.3)에서 보장된다.) 이를 합치면

$$a_n = \frac{2(\lambda_n + h^2)}{\lambda_n + h^2 + h} \left[\frac{\pi \sin \sqrt{\lambda_n}}{\pi^2 - \lambda_n} + \frac{h \sin \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right]. \quad (7.3)$$

표 4: 전개 계수 a_n (수치적분 결과와 10^{-13} 이내로 일치)

n	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 5$	$h = 10$
1	+0.1145	+0.3593	+0.5943	+0.8250	+0.9208
2	+0.0107	-0.0546	-0.1610	-0.3496	-0.4776
3	-0.3526	-0.3303	-0.2890	-0.1953	-0.1126
4	-0.1328	-0.1401	-0.1544	-0.1917	-0.2344
5	-0.1686	-0.1627	-0.1513	-0.1203	-0.0820
6	-0.0971	-0.1001	-0.1061	-0.1230	-0.1461

최종 해

$$u(x, t) = 1 + \frac{1-h}{1+h} x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (7.4)$$

여기서 λ_n 은 $\tan \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}/h$ 의 양의 근, $(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 < \lambda_n < n^2 \pi^2$.

비고. (i) $\sin \pi x$ 는 이 문제의 고유함수가 아니므로(π^2 은 고유값이 아님) 모든 모드로 전개된다. $h \rightarrow \infty$ 이면 $\lambda_1 \rightarrow \pi^2$, $a_1 \rightarrow 1$ 이 되어 그 성분이 제1모드에 집중된다. (ii) $\phi(0) = -1 \neq 0$ 으로 $x = 0$ 에서 경계조건과 불일치하므로 $a_n = O(\lambda_n^{-1/2}) = O(1/n)$ 로 느리게 감소한다. $t = 0$ 근처에서는 많은 항이 필요하지만, $t > 0$ 에서는 $e^{-\alpha \lambda_n t}$ 인자 때문에 급수가 빠르게 수렴한다.