

고유함수 형태의 열원을 갖는 열방정식의 풀이

Robin 경계조건과 고유함수 전개

공학수학 II · 강의노트 §12.9 Example 풀이

1 문제

다음 문제를 푼다. 여기서 $h = 1$ 이고 λ_1 은 $\tan \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$ 의 가장 작은 양의 근이다.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \sin \sqrt{\lambda_1} x, & 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) + h u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

PDE가 비동차(열원 $f(x) = \sin \sqrt{\lambda_1} x$)이므로 변수분리를 바로 쓸 수 없다. 경계조건은 동차이므로 고유함수 전개로 푼다.

2 관련 고유값 문제

동차 문제를 변수분리하면 (§12.6 참조)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) + hX(1) = 0. \quad (2.1)$$

$\lambda \leq 0$ 이면 자명해뿐이고, $\lambda > 0$ 이면 $X = \sin \sqrt{\lambda} x$ 이며 우측 조건에서

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + h \sin \sqrt{\lambda} = 0 \iff \tan \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \quad (2.2)$$

$h = 1$ 일 때의 처음 네 고유값은 표 1와 같다. 고유함수 $X_n = \sin \sqrt{\lambda_n} x$ 는 Sturm–Liouville 이론에 의해 $[0, 1]$ 에서 서로 직교한다.

표 1: $h = 1$ 일 때의 고유값 (Brent 법)

n	$\sqrt{\lambda_n}$	λ_n
1	2.028758	4.11586
2	4.913180	24.13934
3	7.978666	63.65911
4	11.085538	122.88916

3 고유함수 전개

해를 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$ 로 놓는다. PDE에 X_m 을 곱하고 $[0, 1]$ 에서 적분하면

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u X_m dx = \int_0^1 u_{xx} X_m dx + \int_0^1 f X_m dx. \quad (3.1)$$

두 번 부분적분하면 $\int_0^1 u_{xx} X_m dx = [u_x X_m - u X'_m]_0^1 + \int_0^1 u X''_m dx$ 이다. u 와 X_m 이 같은 경계조건을 만족하므로 경계항은 $x = 0$ 에서 $u = X_m = 0$, $x = 1$ 에서 $u_x X_m - u X'_m = (-hu)X_m - u(-hX_m) = 0$ 이 되어 사라진다. $X''_m = -\lambda_m X_m$ 과 직교성을 쓰면

$$T'_m(t) + \lambda_m T_m(t) = f_m, \quad f_m = \frac{\int_0^1 f X_m dx}{\int_0^1 X_m^2 dx}, \quad T_m(0) = 0. \quad (3.2)$$

3.1 열원의 전개 계수

열원 $f(x) = \sin \sqrt{\lambda_1} x$ 는 첫 번째 고유함수 그 자체이다. 직교성에 의해

$$f_1 = 1, \quad f_m = 0 \quad (m \geq 2). \quad (3.3)$$

따라서 $m \geq 2$ 에서는 $T'_m + \lambda_m T_m = 0$, $T_m(0) = 0$ 이므로 $T_m \equiv 0$ 이고, $m = 1$ 에서만

$$T'_1 + \lambda_1 T_1 = 1, \quad T_1(0) = 0 \implies T_1(t) = \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}. \quad (3.4)$$

최종 해

$$u(x, t) = \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \sin \sqrt{\lambda_1} x, \quad \sqrt{\lambda_1} = 2.028758, \quad \lambda_1 = 4.115858. \quad (3.5)$$

4 검산

- PDE: $u_t = e^{-\lambda_1 t} \sin \sqrt{\lambda_1} x$, $u_{xx} = -(1 - e^{-\lambda_1 t}) \sin \sqrt{\lambda_1} x$ 이므로 $u_t - u_{xx} = \sin \sqrt{\lambda_1} x$.
- 경계조건: $u(0, t) = 0$. $u_x(1, t) + u(1, t) \propto \sqrt{\lambda_1} \cos \sqrt{\lambda_1} + \sin \sqrt{\lambda_1} = 0$ (식 (2.2)).
- 초기조건: $T_1(0) = 0$ 이므로 $u(x, 0) = 0$.

5 해의 성질

5.1 정상상태와 직접 풀이의 비교

$t \rightarrow \infty$ 에서 $u \rightarrow S(x) = \sin(\sqrt{\lambda_1} x)/\lambda_1$ 이다. 이를 정상 문제 $S'' = -\sin kx$ ($k = \sqrt{\lambda_1}$), $S(0) = 0$, $S'(1) + S(1) = 0$ 을 직접 풀어 확인할 수 있다. 일반해 $S = \sin(kx)/k^2 + Ax + B$ 에서 $B = 0$ 이고,

$$S'(1) + S(1) = \frac{k \cos k + \sin k}{k^2} + 2A = 2A = 0$$

(식 (2.2)에서 $k \cos k + \sin k = 0$)이므로 $A = 0$ 이다. 두 방법의 결과가 일치한다. 온도는 $\sqrt{\lambda_1} x = \pi/2$, 즉 $x \approx 0.774$ 에서 최대값 $1/\lambda_1 \approx 0.243$ 에 도달한다.

5.2 열수지

정상상태에서 내부 발생열은 양 끝으로 빠져나가는 열과 같아야 한다. $\int_0^1 S'' dx = S'(1) - S'(0) = -\int_0^1 f dx$ 이므로 $S'(0) + (-S'(1)) = \int_0^1 f dx$ 이고, 수치로도 정확히 성립한다(표 2).

표 2: 정상상태의 열수지 ($h = 1$)

항목	식	값
$x = 0$ 에서 빠져나가는 열	$S'(0) = 1/\sqrt{\lambda_1}$	0.492912
$x = 1$ 에서 빠져나가는 열	$-S'(1) = h S(1)$	0.217927
합계		0.710839
내부 발생열	$\int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_1} x dx$	0.710839

5.3 시간 척도

해의 공간 모양은 처음부터 끝까지 $\sin \sqrt{\lambda_1} x$ 로 변하지 않고, 진폭만 $T_1(t)$ 를 따라 정상값 $1/\lambda_1$ 로 커진다(그림 1, 2). 시간상수는 $\tau = 1/\lambda_1 \approx 0.243$ 이며, $t = 3\tau \approx 0.73$ 에서 정상값의 95%에 도달한다.

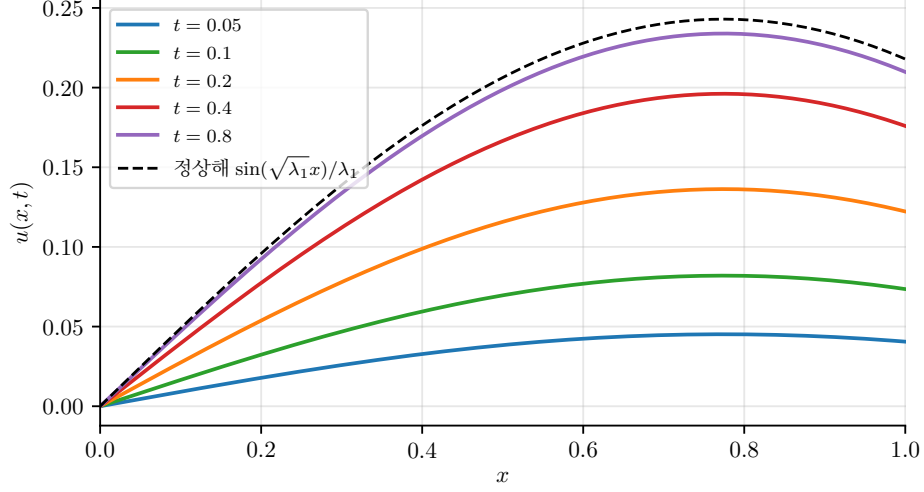


그림 1: 시간에 따른 온도 분포. 모양은 $\sin \sqrt{\lambda_1}x$ 로 고정되고 진폭만 증가한다.

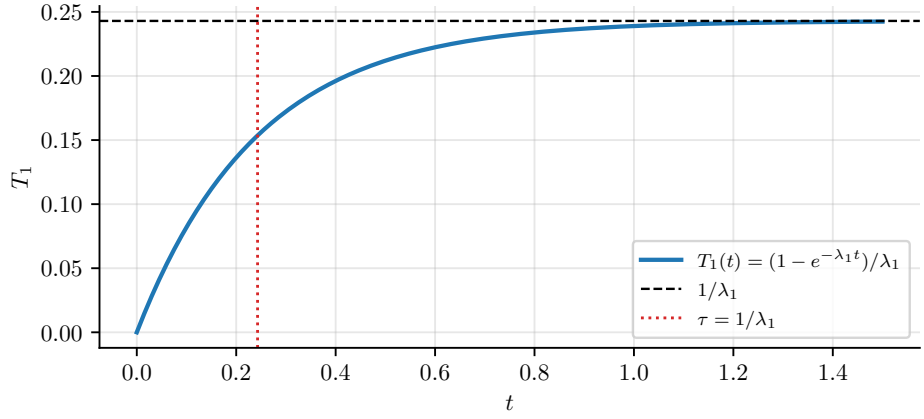


그림 2: 모드 진폭 $T_1(t)$. 시간상수 $1/\lambda_1$ 이후 정상값 $1/\lambda_1$ 에 빠르게 접근한다.

5.4 수치 검증

문제 (1.1)를 유한차분(격자 201개, $x = 1$ 에서는 가상점으로 $u_x + hu = 0$ 처리)으로 풀어 비교하였다(표 3). 최대 오차는 10^{-6} 이하이다.

표 3: 해석해와 유한차분 수치해의 비교

t	$u(0.5, t)$ 해석해	$u(0.5, t)$ 수치해	$\max u_{\text{FD}} - u $
0.1	0.069610	0.069610	1.4×10^{-7}
0.4	0.166545	0.166545	4.7×10^{-7}
1	0.202947	0.202948	7.9×10^{-7}
3	0.206312	0.206312	8.4×10^{-7}

비고. (i) 열원이 고유함수가 아니면, 예를 들어 $f = 1$ 이면 모든 f_m 이 0이 아니어서 $u = \sum_m f_m(1 - e^{-\lambda_m t})X_m/\lambda_m$ 의 무한급수가 된다. 이 예제는 열원을 고유함수로 골라 한 개의 모드만 남도록 만든 것이다. (ii) 식 (3.2)를 얻을 때 급수를 항별로 미분하지 않고, PDE에 X_m 을 곱해 부분적분하는 방법을 썼다. 이렇게 하면 u 와 X_m 이 같은 경계조건을 만족한다는 사실만으로 경계항이 사라지므로 논리가 깔끔하다.