

쌍곡형 방정식 $u_{xx} + 4u_{xy} = 0$ 의 표준형과 일반해

특성좌표의 계산

공학수학 II · 강의노트 §13.10 Example 풀이

1 문제

$$u_{xx} + 4u_{xy} = 0 \quad (1.1)$$

의 특성좌표를 구하고, 변환된 방정식을 풀어 원래 좌표로 되돌려 일반해를 구한다.

2 분류와 특성방정식

$A = 1, B = 4, C = 0$ 이므로 $B^2 - 4AC = 16 > 0$, 즉 모든 점에서 쌍곡형이다. 강의노트 §13.10의 특성방정식은

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 \mp 4}{2} = 0, \quad 4. \quad (2.1)$$

적분하면 두 특성곡선족은

$$y = c_1, \quad y - 4x = c_2 \quad (2.2)$$

이다(그림 1). 따라서 특성좌표를

$$\xi = y, \quad \eta = y - 4x \quad (2.3)$$

로 잡는다. Jacobian은 $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) = 4 \neq 0$ 이다.

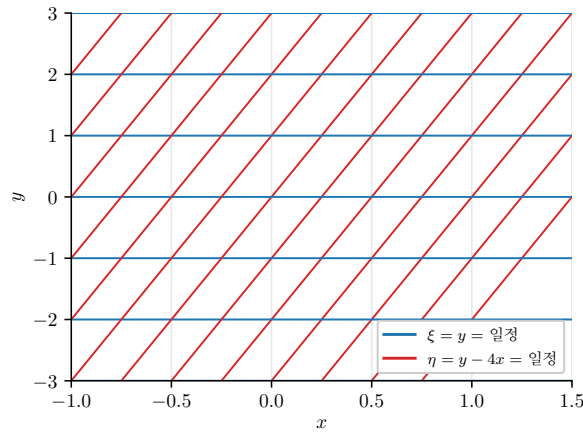


그림 1: 특성곡선 $\xi = y = \text{일정}$ 과 $\eta = y - 4x = \text{일정}$.

3 변환

$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = -4, \eta_y = 1$ 이므로 연쇄법칙에 의해

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -4u_\eta, \quad u_{xx} = -4(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) = 16u_{\eta\eta}, \quad (3.1)$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(-4u_\eta) = -4(u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}). \quad (3.2)$$

대입하면

$$u_{xx} + 4u_{xy} = 16u_{\eta\eta} - 16u_{\eta\xi} - 16u_{\eta\eta} = -16u_{\eta\xi} = 0 \implies u_{\eta\xi} = 0. \quad (3.3)$$

$\bar{A} = \bar{C} = 0$ 이 되어 첫째 표준형 $u_{\xi\eta} = 0$ 을 얻는다.

4 일반해

$u_{\xi\eta} = 0$ 을 η 로 적분하면 $u_\xi = \varphi(\xi)$ 이고, 다시 ξ 로 적분하면 $u = F(\xi) + G(\eta)$ 이다.

최종 해

$$u(x, y) = F(y) + G(y - 4x), \quad F, G \text{는 임의의 두 번 미분가능한 함수.} \quad (4.1)$$

검산. $u = F(y) + G(y - 4x)$ 이면 $u_x = -4G'$, $u_{xx} = 16G''$, $u_{xy} = -4G''$ 이므로 $u_{xx} + 4u_{xy} = 16G'' - 16G'' = 0$ 이다.

비고. 연산자를 인수분해하면 $u_{xx} + 4u_{xy} = \partial_x(\partial_x + 4\partial_y)u$ 이다. ∂_x 는 x 에 무관한 함수 $F(y)$ 를 없애고, $\partial_x + 4\partial_y$ 는 $y - 4x$ 만의 함수 $G(y - 4x)$ 를 없앤다. 두 인수가 서로 교환되므로, 이렇게 해도 같은 일반해를 바로 얻는다.