

3변수 1계 선형 방정식: 표면파

특성선의 방법

공학수학 II · 강의노트 §13.11 Example 풀이

1 문제

상수 a, b, c, d ($c \neq 0$)에 대해 다음 문제를 푼다.

$$\begin{aligned} a u_x + b u_y + c u_t + d u &= 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, y, 0) &= e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

2 특성선

강의노트 §13.11의 방법을 그대로 3변수로 확장한다. 특성선 $(x(s), y(s), t(s))$ 를

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{dt}{ds} = c \quad (2.1)$$

로 정의하면, 특성선을 따라

$$\frac{du}{ds} = a u_x + b u_y + c u_t = -d u \quad (2.2)$$

이다. 특성선이 초기 평면 $t = 0$ 의 점 (x_0, y_0) 에서 출발한다고 하면($s = 0$)

$$x = x_0 + as, \quad y = y_0 + bs, \quad t = cs, \quad u = u(x_0, y_0, 0) e^{-ds}. \quad (2.3)$$

3 원래 변수로 되돌리기

$s = t/c$ 이므로 $x_0 = x - \frac{a}{c}t$, $y_0 = y - \frac{b}{c}t$ 이다. 이를 대입하면 다음을 얻는다.

최종 해

$$u(x, y, t) = \exp \left[- \left(x - \frac{a}{c}t \right)^2 - \left(y - \frac{b}{c}t \right)^2 \right] e^{-dt/c} \quad (3.1)$$

검산. $\theta = -(x - \frac{a}{c}t)^2 - (y - \frac{b}{c}t)^2 - \frac{d}{c}t$ 로 두면 $u = e^\theta$ 이고 $u_x = -2(x - \frac{a}{c}t)u$, $u_y = -2(y - \frac{b}{c}t)u$, $u_t = [\frac{2a}{c}(x - \frac{a}{c}t) + \frac{2b}{c}(y - \frac{b}{c}t) - \frac{d}{c}]u$ 이다. 따라서 $au_x + bu_y + cu_t = -du$ 가 성립한다. $t = 0$ 에서는 초기조건과 같다.

4 해석

초기의 Gauss 모양 “언덕”이 모양을 유지한 채 속도 벡터 $(a/c, b/c)$ 로 평면 위를 이동한다. 동시에 높이는 $e^{-dt/c}$ 로 줄어든다($d > 0$ 이면 감쇠, $d < 0$ 이면 증폭). 그림 1은 $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 1$, $d = 0.3$ 인 경우의 등고선이다.

비고. 일반적인 초기조건 $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ 에 대해서도 같은 방법으로 $u = \phi(x - \frac{a}{c}t, y - \frac{b}{c}t) e^{-dt/c}$ 를 얻는다. 1계 선형 방정식에서는 초기 모양이 특성선을 따라 그대로 운반된다.

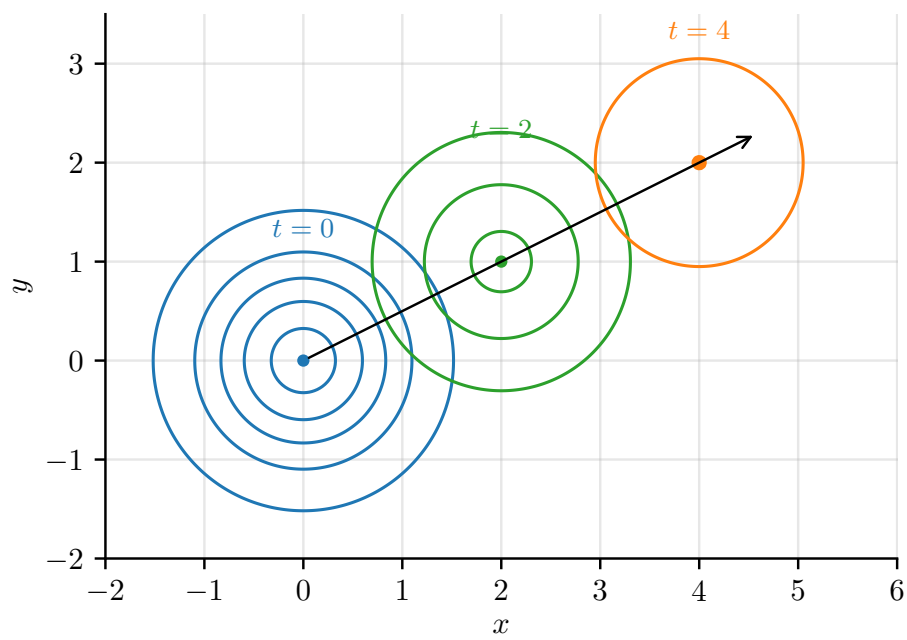


그림 1: $t = 0, 2, 4$ 에서의 등고선($u = 0.1, 0.3, \dots, 0.9$). 언덕이 방향 $(1, 0.5)$ 로 이동하면서 낮아져 안쪽 등고선이 사라진다.