

비점성 Burgers 방정식: 삼각형 초기조건

특성선, 충격파의 형성, 점프 조건

공학수학 II · 강의노트 §13.12 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x) = \begin{cases} 3(1 - |x|), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

보존 형태로 쓰면 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$ 이므로 유속은 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ 이고 특성 속도는 $g(u) = f'(u) = u$ 이다.

2 특성선과 충격파 이전의 해 ($t < 1/3$)

u 는 특성선 $x = x_0 + \phi(x_0)t$ 를 따라 일정하다 (§13.12).

- 왼쪽 경사 ($-1 \leq x_0 \leq 0, \phi = 3(1 + x_0)$): $x = x_0 + 3(1 + x_0)t$ 에서 x_0 를 구해 대입하면 $u = \frac{3(1+x)}{1+3t}$ 이다. 높은 쪽이 더 빨리 움직이므로 특성선이 벌어져 경사가 완만해진다.
- 오른쪽 경사 ($0 \leq x_0 \leq 1, \phi = 3(1 - x_0)$): 같은 방법으로 $u = \frac{3(1-x)}{1-3t}$ 이다. 뒤(높은 쪽)가 앞을 따라잡으므로 특성선이 모여 경사가 가팔라진다.
- $|x_0| \geq 1$: $u = 0$ 이고 특성선은 수직선이다.

꼭짓점 ($x_0 = 0, u = 3$)은 $x = 3t$ 로 움직인다. 따라서 $t < 1/3$ 에서는

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3(1+x)}{1+3t}, & -1 \leq x \leq 3t, \\ \frac{3(1-x)}{1-3t}, & 3t < x < 1, \\ 0, & \text{그 밖.} \end{cases} \quad (2.1)$$

오른쪽 경사의 특성선은 모두 $t = 1/3$ 에 점 $(1, \frac{1}{3})$ 에 모인다. 이 순간 오른쪽 경사가 수직이 되어 충격파가 생긴다. 파괴 시각은 일반적인 공식 $t_b = -1/\min[g'(\phi)\phi'] = -1/(-3) = 1/3$ 과도 일치한다(다음 Example 참조).

3 충격파 이후의 해 ($t > 1/3$)

충격파 위치를 $x_s(t)$ 라 하면, 그 왼쪽은 $u^- = \frac{3(1+x_s)}{1+3t}$ 이고 오른쪽은 $u^+ = 0$ 이다. 점프 조건(Rankine-Hugoniot)에 의해

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = \frac{u^- + u^+}{2} = \frac{3(1+x_s)}{2(1+3t)}, \quad x_s\left(\frac{1}{3}\right) = 1. \quad (3.1)$$

$y = 1 + x_s$ 로 두면 $\frac{dy}{y} = \frac{3dt}{2(1+3t)}$ 이므로 $y = K\sqrt{1+3t}$ 이고, 초기조건에서 $K = \sqrt{2}$ 이다.

최종 해

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3(1+x)}{1+3t}, & -1 \leq x < x_s(t), \\ 0, & \text{그 밖,} \end{cases} \quad x_s(t) = \sqrt{2(1+3t)} - 1 \quad (t \geq \frac{1}{3}). \quad (3.2)$$

$t < 1/3$ 에서는 앞 절의 해이다.

4 검토

- 넓이 보존: $\int u dx = \frac{1}{2}(1+x_s)u^- = \frac{3(1+x_s)^2}{2(1+3t)} = 3$ 이 모든 $t \geq 1/3$ 에서 성립한다. 초기 삼각형의 넓이도 3이다.
- 엔트로피 조건: $f'(u^+) = 0 < s = u^-/2 < u^- = f'(u^-)$ 이므로 Lax 조건을 만족한다. 특성선이 양쪽에서 충격파로 들어간다(그림 2).
- 긴 시간 거동: $u^- = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1+3t}} \approx \sqrt{6/t}$, $x_s \approx \sqrt{6t}$ 이다. 삼각형이 넓어지고 낮아지면서 넓이 3을 유지한다.
- 수치 확인: 보존형 Godunov 방법(격자 6000개)으로 푼 결과의 충격파 위치가 정확해와 10^{-3} 이내로 일치하고 넓이도 3으로 유지된다(표 1).

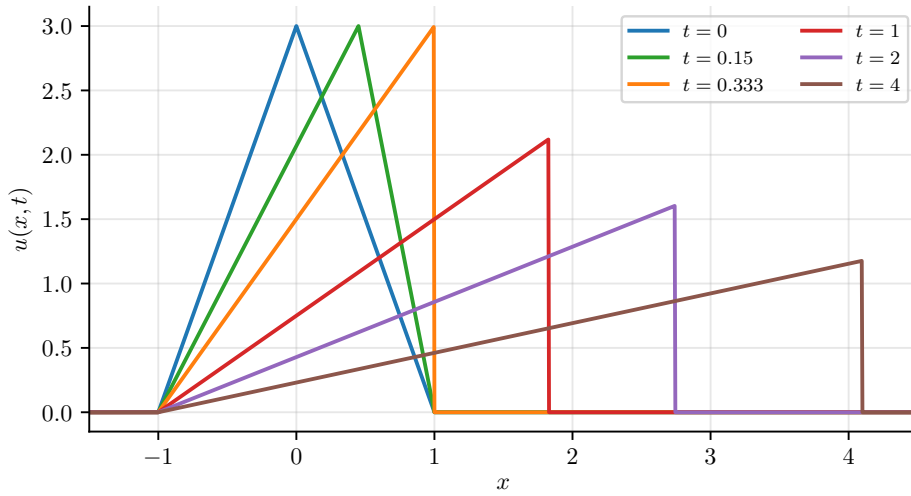


그림 1: 시간에 따른 $u(x, t)$. $t = 1/3$ 에 오른쪽 경사가 수직이 되고, 그 뒤로는 직각삼각형 모양으로 넓어진다.

표 1: 정확해와 Godunov 수치해의 비교

t	충격파 위치 (정확)	충격파 위치 (Godunov)	$\int u dx$ (수치)	충격파 직전 u^-
0.5	1.2361	1.2353	3.0000	2.6833
1	1.8284	1.8273	3.0000	2.1213
2	2.7417	2.7407	3.0000	1.6036
4	4.0990	4.0967	3.0000	1.1767

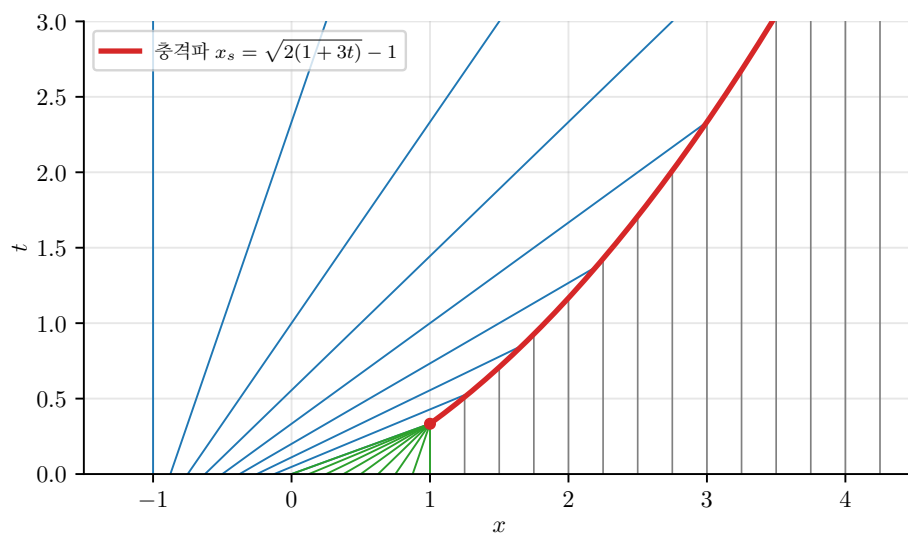


그림 2: 특성선과 충격파. 오른쪽 경사의 특성선(초록)이 $(1, \frac{1}{3})$ 에 모이고, 그 뒤 충격파(빨강)가 양쪽 특성선을 흡수한다.