

비선형 1계 방정식의 음함수 해

$u = \phi[x - g(u)t]$ 의 검증과 파괴 시각

공학수학 II · 강의노트 §13.12 Example 풀이

1 문제

$u = \phi[x - g(u)t]$ 가 다음 문제의 음함수 해임을 보인다.

$$u_t + g(u) u_x = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x). \quad (1.1)$$

2 검증

$\xi = x - g(u)t$ 로 두면 $u = \phi(\xi)$ 이다. u 가 x, t 의 함수이므로 ξ 도 u 를 통해 x, t 에 의존한다는 점에 주의하여 미분한다.

$$u_t = \phi'(\xi) \xi_t = \phi'(\xi) [-g(u) - g'(u) u_t t], \quad (2.1)$$

$$u_x = \phi'(\xi) \xi_x = \phi'(\xi) [1 - g'(u) u_x t]. \quad (2.2)$$

각각 u_t, u_x 에 대해 정리하면

$$u_t = -\frac{g(u) \phi'(\xi)}{1 + t g'(u) \phi'(\xi)}, \quad u_x = \frac{\phi'(\xi)}{1 + t g'(u) \phi'(\xi)}. \quad (2.3)$$

따라서

$$u_t + g(u) u_x = \frac{-g\phi' + g\phi'}{1 + t g'\phi'} = 0. \quad (2.4)$$

또 $t = 0$ 이면 $\xi = x$ 이므로 $u(x, 0) = \phi(x)$ 이다.

결론

분모 $1 + t g'(u) \phi'(\xi) \neq 0$ 인 한, $u = \phi[x - g(u)t]$ 는 PDE와 초기조건을 모두 만족한다.

3 의미: 특성선

$\xi = x - g(u)t$ 를 x 에 대해 풀면 $x = \xi + g(\phi(\xi))t$ 이다. 이것은 점 $(\xi, 0)$ 에서 출발하는 특성선이다. 음함수 해는 “점 (x, t) 를 지나는 특성선을 따라 초기선까지 거슬러 올라가, 출발점 ξ 에서의 초기값 $\phi(\xi)$ 를 가져온다”는 뜻이다. g 가 상수 v 이면 $u = \phi(x - vt)$ 가 되어 선형 대류의 해로 돌아간다.

4 음함수 해가 존재할 조건과 파괴 시각

$F(u; x, t) = u - \phi(x - g(u)t) = 0$ 을 u 에 대해 풀 수 있으려면, 음함수 정리에 의해

$$F_u = 1 + t g'(u) \phi'(\xi) \neq 0 \quad (4.1)$$

이어야 한다. 이 값은 위 분모와 같다. $g'(\phi(\xi)) \phi'(\xi) \geq 0$ 인 곳에서는 분모가 0이 되지 않는다. 그러나 이 값이 음수인 곳이 있으면, 분모가 처음 0이 되는 시각

$$t_b = -\frac{1}{\min_{\xi} [g'(\phi(\xi)) \phi'(\xi)]} \quad (4.2)$$

에 $u_x \rightarrow \infty$ 가 되어 해의 경사가 수직이 된다(파괴). 이때 특성선이 서로 교차하기 시작하고, 그 이후에는 충격파를 도입해야 한다.

예.

- 강의노트의 교통 문제: $f = u^2$ 이므로 $g = 2u$, $g' = 2$ 이다. $0 < x < 1$ 에서 $\phi' = -1$ 이므로 $t_b = -1/(2 \cdot (-1)) = 1/2$ 이다. 강의노트에서 그림으로 찾은 시각과 같다.
- 앞 Example의 Burgers 방정식: $g = u$, $g' = 1$ 이다. 오른쪽 경사에서 $\phi' = -3$ 이므로 $t_b = 1/3$ 이다.

비고. 선형 방정식(g 가 상수, $g' = 0$)에서는 분모가 항상 1이므로 파괴가 일어나지 않는다. 충격파는 특성 속도가 해 u 에 의존하는 비선형 방정식에서만 생긴다.