

1계 선형 연립 편미분방정식의 일반해

대각화와 두 진행파

공학수학 II · 강의노트 §13.13 Example 풀이

1 문제

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + 4\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

의 일반해를 구한다.

2 행렬 형태와 대각화

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 로 두면

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A} \mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

고유값은 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0$ 에서 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 이다. 대응하는 고유벡터는

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2]$, $\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{v}$ 로 두면 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(3, -1)$ 이므로

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 3\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

로 분리된다. 각각의 해는 $v_1 = \phi(x - 3t)$, $v_2 = \psi(x + t)$ 이다.

최종 해

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \phi(x - 3t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \psi(x + t) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x - 3t) + \psi(x + t) \\ 2\phi(x - 3t) - 2\psi(x + t) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

ϕ, ψ 는 임의의 미분가능한 함수.

검산. $u_1 = \phi + \psi$, $u_2 = 2\phi - 2\psi$ 이면 $u_{1,t} + u_{1,x} + u_{2,x} = (-3\phi' + \psi') + (\phi' + \psi') + (2\phi' - 2\psi') = 0$ 이고, $u_{2,t} + 4u_{1,x} + u_{2,x} = (-6\phi' - 2\psi') + (4\phi' + 4\psi') + (2\phi' - 2\psi') = 0$ 이다.

3 초기조건이 주어진 경우

$u_1(x, 0) = f(x)$, $u_2(x, 0) = g(x)$ 이면 $\phi + \psi = f$, $2\phi - 2\psi = g$ 에서

$$\phi = \frac{2f + g}{4}, \quad \psi = \frac{2f - g}{4}. \quad (3.1)$$

초기 교란은 속도 3으로 오른쪽으로 가는 파동(성분 비 $u_2/u_1 = 2$)과 속도 1로 왼쪽으로 가는 파동(성분 비 -2)으로 나뉜다. 그림 1은 $f = e^{-x^2}$, $g = 0$ 인 경우이다.

비고. 고유값 3과 -1 이 서로 다른 실수이므로 이 연립방정식은 쌍곡형이다. 고유값이 파동의 속도이고 고유벡터가 각 파동의 성분 비율이다. u_1 을 소거하면 $u_{2,tt} + 2u_{2,tx} - 3u_{2,xx} = 0$ 이라는 2계 방정식을 얻는다. 이 방정식의 특성 속도도 3과 -1 이다.

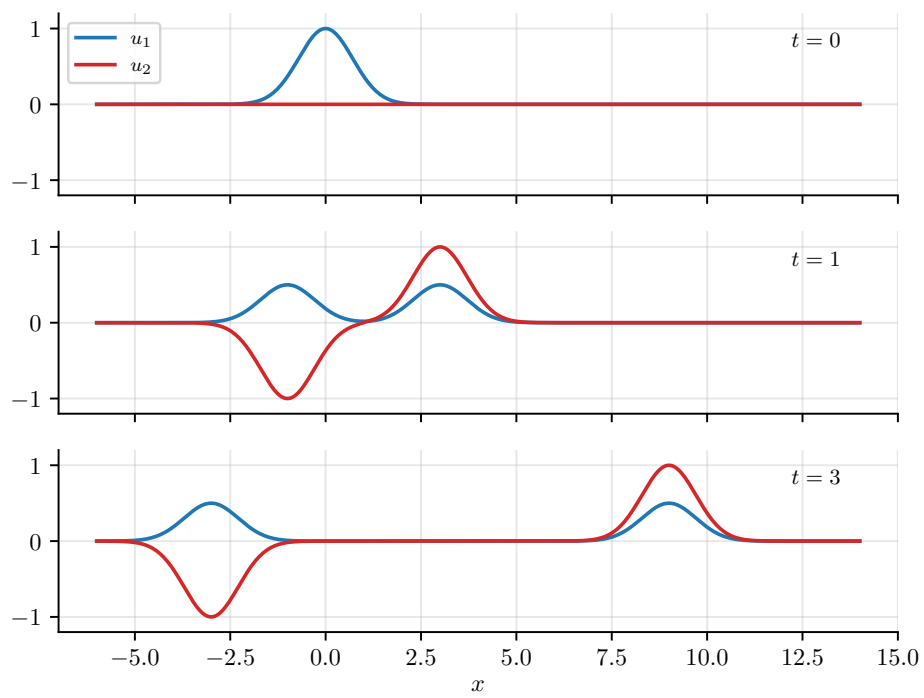


그림 1: $f = e^{-x^2}$, $g = 0$ 일 때 해. 오른쪽 파동에서는 $u_2 = 2u_1$, 왼쪽 파동에서는 $u_2 = -2u_1$ 이다.