

고정단을 갖는 반무한 현의 진동

홀함수 확장과 반사파

공학수학 II · 강의노트 §13.3 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = f(x) &= \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{그 밖} \end{cases}, & u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

현의 왼쪽 끝 $x = 0$ 이 고정되어 있고, 처음에 $1 \leq x \leq 2$ 부분을 높이 1로 들었다가 가만히 놓는 상황이다.

2 풀이: 반무한 현의 D'Alembert 공식

강의노트에서 유도한 반무한 현의 해($g = 0$ 인 경우)는

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)], & x \geq ct, \\ \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)], & 0 < x < ct. \end{cases} \quad (2.1)$$

이는 f 를 $x < 0$ 으로 홀함수 확장한 $f_{\text{odd}}(x) = \text{sgn}(x)f(|x|)$ 를 무한 현의 D'Alembert 공식에 넣은 것과 같다. 즉 $u = \frac{1}{2}[f_{\text{odd}}(x+ct) + f_{\text{odd}}(x-ct)]$ 이다. 홀함수의 성질에 의해 $u(0, t) = \frac{1}{2}[f_{\text{odd}}(ct) + f_{\text{odd}}(-ct)] = 0$ 이 저절로 성립한다.

3 세 개의 반쪽 펄스

식 (2.1)을 이 f 에 적용하면 해는 높이 $\pm \frac{1}{2}$ 인 직사각형 펄스 세 개의 합이다.

$$\text{오른쪽으로 가는 펄스:} \quad +\frac{1}{2}, \quad 1+ct < x < 2+ct, \quad (3.1)$$

$$\text{왼쪽으로 가는(입사) 펄스:} \quad +\frac{1}{2}, \quad 1-ct < x < 2-ct \quad (x > 0), \quad (3.2)$$

$$\text{반사된 펄스:} \quad -\frac{1}{2}, \quad ct-2 < x < ct-1 \quad (x > 0). \quad (3.3)$$

최종 해

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \chi_{(1+ct, 2+ct)}(x) + \frac{1}{2} \chi_{(1-ct, 2-ct)}(x) - \frac{1}{2} \chi_{(ct-2, ct-1)}(x), \quad x > 0,$$

여기서 $\chi_{(a,b)}$ 는 구간 (a, b) 에서 1, 밖에서 0인 함수이다. 왼쪽으로 가던 펄스는 고정단에서 부호가 뒤집혀 반사된다.

4 시간에 따른 모양

그림 1은 $c = 1$ 일 때의 모양이다.

- $0 < t < 1$: 처음 펄스가 높이 $\frac{1}{2}$ 인 두 펄스로 갈라져 양쪽으로 이동한다.
- $1 < t < 2$: 왼쪽 펄스가 벽에 닿아 반사되기 시작한다. 벽 근처에서는 입사 펄스($+\frac{1}{2}$)와 반사 펄스($-\frac{1}{2}$)가 겹쳐 서로 지워진다. 특히 $t = 1.5$ 에는 왼쪽 펄스가 $0 < x < 0.5$ 에 있고 반사 펄스도 같은 구간에 있으므로, $x < 1$ 영역의 변위가 모두 0이다.
- $t > 2$: 반사가 끝나고, 높이 $+\frac{1}{2}$ 인 펄스와 $-\frac{1}{2}$ 인 펄스가 같은 속도로 오른쪽으로 진행한다. 둘 사이의 간격은 2로 유지된다.

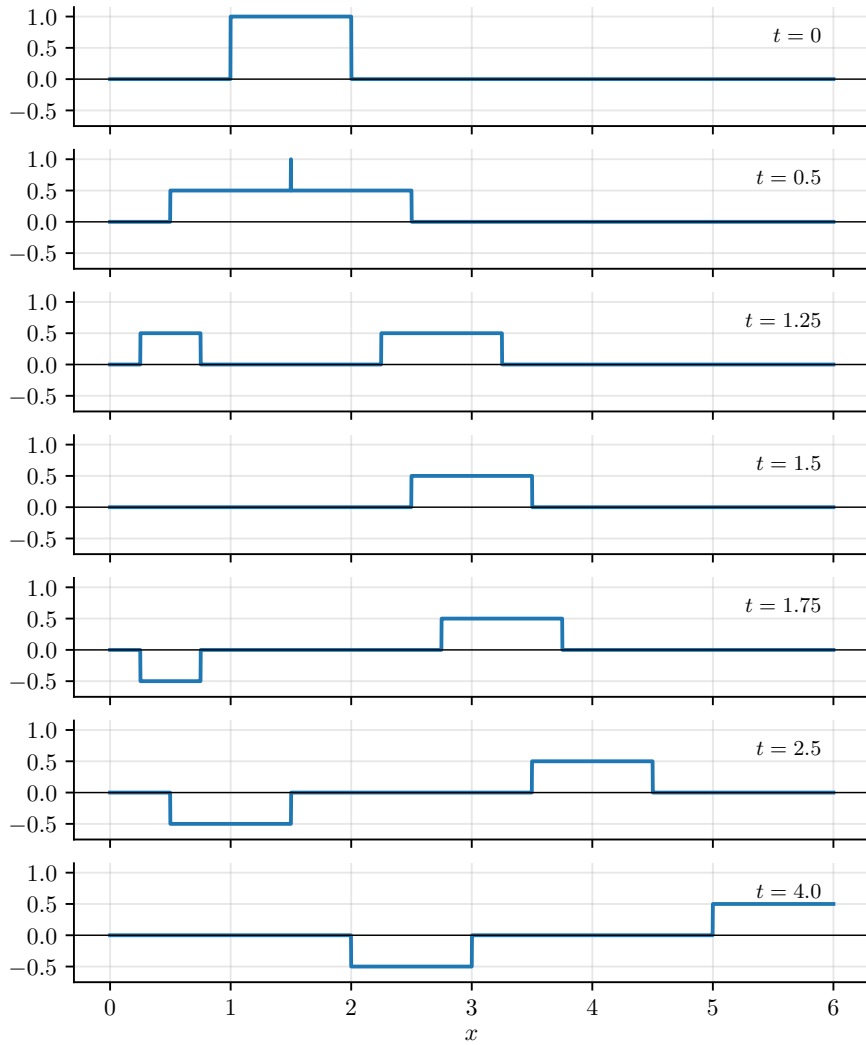


그림 1: 시간에 따른 현의 모양 ($c = 1$). 고정단에서 반사된 펄스는 부호가 바뀐다.

5 xt -평면에서의 해석

각 펄스는 특성선 $x \pm ct = \text{일정}$ 을 따라 움직인다. 그림 2에서 왼쪽으로 가는 펄스가 $x = 0$ 에 닿으면 반사되어 기울기가 반대인 펄스가 되며, 이때 부호가 바뀐다. 점선 $x = ct$ 의 오른쪽($x > ct$)은 벽의 영향을 받지 않아 무한 현의 해와 같고, 왼쪽($x < ct$)에서만 반사파가 나타난다.

표 1: 몇 점에서의 변위 ($c = 1$). 벽 근처($x = 0.1$)는 반사 동안 입사파와 반사파가 지워져 항상 0이다.

t	$u(0.1, t)$	$u(0.4, t)$	$u(1.3, t)$	$u(2.75, t)$
0.5	0	0	0.5	0
1.25	0	0.5	0	0.5
1.5	0	0	0	0.5
1.75	0	-0.5	0	0.5
2.5	0	0	-0.5	0

비고. 끝이 자유로운 경우($u_x(0, t) = 0$)에는 짝함수 확장을 쓰며, 펄스가 부호를 유지한 채 반사된다(강의노트의 다음 Example).

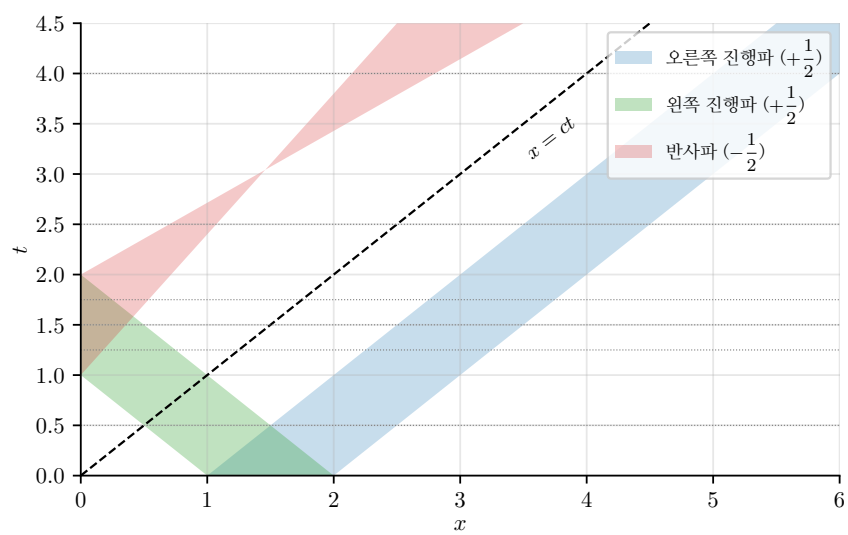


그림 2: xt -평면에서 세 펄스가 지나가는 영역. 가로 점선은 그림 1의 시각이다.