

외력을 받는 무한 현의 진동

비동차 D'Alembert 공식과 1차원 파동의 “기억”

공학수학 II · 강의노트 §13.3 Example 풀이

1 문제

$a > 0, b > 0$ 일 때 다음 문제를 푼다.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + e^{-ax^2-bt}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

외력 $F(x, t) = e^{-ax^2-bt}$ 는 $x = 0$ 근처(폭 $\sim 1/\sqrt{a}$)에 집중되어 있고, 세기는 시간에 따라 e^{-bt} 로 약해진다.

2 비동차 D'Alembert 공식

강의노트에서 특성좌표로 유도한 공식은 다음과 같다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\beta, \tau) d\beta d\tau. \quad (2.1)$$

점 (x, t) 의 변위는 그 점의 의존 영역, 즉 (x, t) 에서 아래로 그린 특성선 삼각형 안의 외력을 모두 더한 값의 $1/(2c)$ 배이다.

3 적분의 계산

F 가 x 와 t 의 함수의 곱이므로 안쪽 β 적분을 오차함수로 나타낼 수 있다.

$$\int_{x-cs}^{x+cs} e^{-a\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{a}(x+cs)) - \operatorname{erf}(\sqrt{a}(x-cs)) \right], \quad s = t - \tau. \quad (3.1)$$

최종 해

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c\sqrt{a}} \int_0^t e^{-b\tau} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{a}(x+c(t-\tau))) - \operatorname{erf}(\sqrt{a}(x-c(t-\tau))) \right] d\tau \quad (3.2)$$

남은 τ 적분은 초등함수로 나타나지 않으므로 수치적분으로 계산한다. 표 1은 이 공식과 원래 문제를 유한차분으로 직접 푼 결과($a = b = c = 1$)를 비교한 것이다.

표 1: 적분 공식과 유한차분 수치해의 비교 ($a = b = c = 1$)

t	x	적분 공식	유한차분
1	0	0.311037	0.311044
1	3	0.000361	0.000361
2	0	0.653140	0.653155
2	3	0.017279	0.017283
5	0	0.874569	0.874570
5	3	0.732761	0.732773
10	0	0.886148	0.886148
10	3	0.885189	0.885189

4 해의 성질

4.1 외력이 사라진 뒤에도 남는 변위

$t \rightarrow \infty$ 이면 고정된 x 의 의존 영역이 외력 전체를 덮는다. 그러면 식 (2.1)은 외력의 총합의 $1/(2c)$ 배로 수렴한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-a\beta^2 - b\tau} d\beta d\tau = \frac{1}{2cb} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (4.1)$$

$a = b = c = 1$ 이면 $\sqrt{\pi}/2 \approx 0.8862$ 이다. 외력이 0이 되어도 현은 원래 위치로 돌아오지 않고, 일정한 높이의 “고원”이 속도 c 로 양쪽으로 넓어진다(그림 1, 2). 이는 1차원 파동방정식의 임펄스 응답이 $\frac{1}{2c}H(ct - |x|)$, 즉 계단 모양이기 때문에 생기는 성질이다. 한 번 가해진 충격이 지나간 자리에 일정한 변위를 남긴다. (3차원에서는 Huygens 원리 때문에 이런 일이 일어나지 않는다. §13.4 참조.)

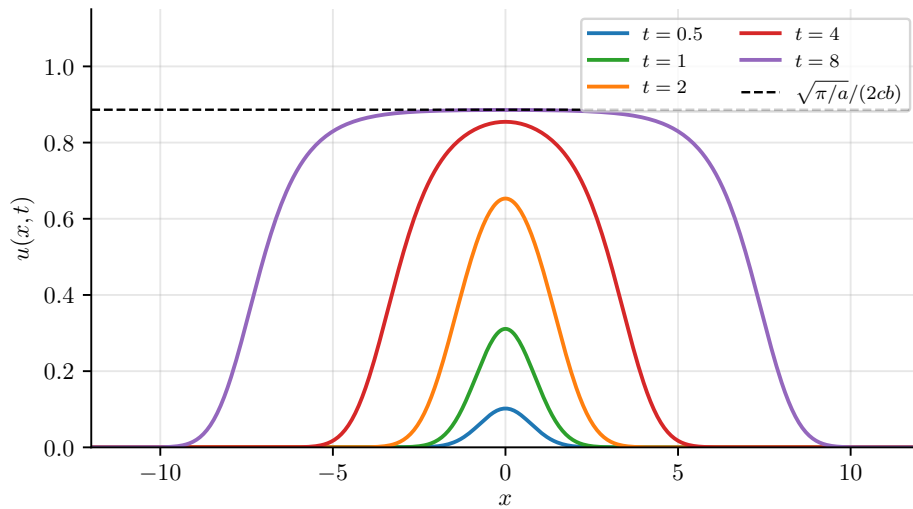


그림 1: 변위 분포 ($a = b = c = 1$). 높이 $\sqrt{\pi}/2$ 의 고원이 속도 c 로 넓어진다.

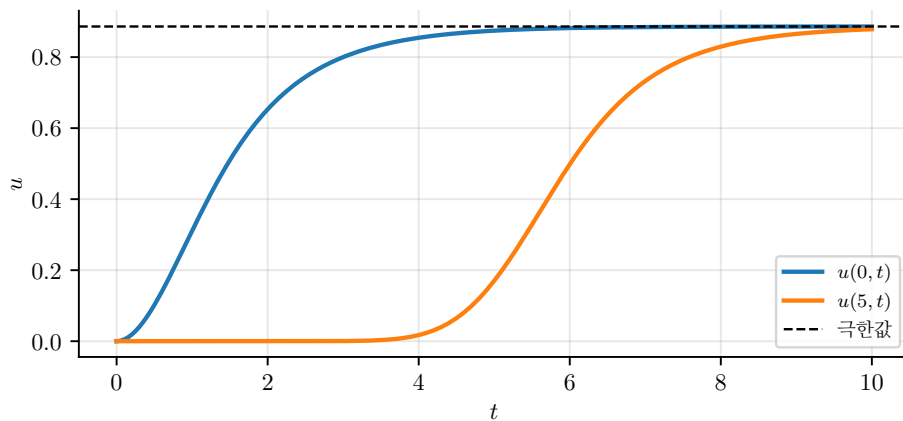


그림 2: $x = 0$ 과 $x = 5$ 에서의 변위. $x = 5$ 에는 시간 $|x|/c = 5$ 무렵에 신호가 도착한다.

4.2 신호의 도착

외력은 $x = 0$ 근처에 있으므로, 점 x 에는 대략 $t \approx |x|/c$ 이후에 변위가 나타난다. 외력이 Gauss 함수라서 엄밀히는 모든 x 에 조금씩 퍼져 있으므로, 도착 시각이 날카롭지 않고 폭 $1/\sqrt{a}$ 정도로 번져 있다.

비고. $b = 0$ (외력이 계속 작용)이면 극한값이 없고, 큰 t 에서 $u(0, t) \approx \frac{t}{2c} \sqrt{\pi/a}$ 로 계속 커진다. 외력이 일정하게 작용하는 동안 고원의 높이가 시간에 비례해 높아지기 때문이다.