

3차원 구형파: 공 모양의 초기 속도

Kirchhoff 공식과 Huygens 원리

공학수학 II · 강의노트 §13.4 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) &= 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0, & \text{그 밖} \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

반지름 1인 공 안의 매질에 처음 순간 속도 1을 주었을 때 퍼져 나가는 파동을 구하고, 그 모양을 그림과 말로 설명한다.

2 Kirchhoff 공식

강의노트에서 유도했듯이 $u(\cdot, 0) = 0$ 이면

$$u(P, t) = t\bar{\psi}(P, t), \quad \bar{\psi}(P, t) = \text{점 } P \text{를 중심으로 하는 반지름 } ct \text{인 구면 위에서 } \psi \text{의 평균}. \quad (2.1)$$

이 문제에서 ψ 는 공 안에서 1, 밖에서 0이다. 따라서 $\bar{\psi}$ 는 반지름 ct 인 구면 가운데 단위 공 안에 들어가는 넓이의 비율이다. 문제가 구대칭이므로 u 는 $r = |P|$ 와 t 만의 함수이다.

3 넓이 비율의 계산

$R = ct$ 라 하고 구면 위의 점 Q 가 $\overrightarrow{PO}$ 방향과 이루는 각을 γ 라 하면, 코사인 법칙에 의해 $|OQ|^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma$ 이다. Q 가 공 안에 있을 조건 $|OQ| < 1$ 은 $\cos\gamma > \frac{r^2 + R^2 - 1}{2rR}$ 이다. 구면에서 이런 점들은 구관(spherical cap)을 이루고, 그 넓이 비율은 $(1 - \cos\gamma_0)/2$ 이다. 따라서

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2 + R^2 - 1}{2rR} \right) = \frac{1 - (r - R)^2}{4rR} \quad (|r - R| < 1 < r + R). \quad (3.1)$$

구면 전체가 공 안에 있으면($r + R \leq 1$) $\bar{\psi} = 1$ 이고, 구면이 공과 만나지 않으면($R \leq r - 1$ 또는 $R \geq r + 1$) $\bar{\psi} = 0$ 이다.

최종 해

$$u(r, t) = \begin{cases} t, & ct \leq 1 - r \quad (\text{공 안, 초기}), \\ \frac{1 - (r - ct)^2}{4cr}, & |r - ct| < 1 < r + ct, \\ 0, & \text{그 밖} \quad (ct < r - 1 \text{ 또는 } ct > r + 1). \end{cases} \quad (3.2)$$

검산. 구대칭 파동방정식은 $v = ru$ 로 놓으면 1차원 파동방정식 $v_{tt} = c^2 v_{rr}$ 이 되고, $v(0, t) = 0$ 이다. $v_t(r, 0) = r\psi$ 의 홀함수 확장애 D'Alembert 공식을 쓰면 $u = \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} s \chi_{[-1,1]}(s) ds$ 이다. 이 값은 위 결과와 정확히 같다(표 1).

4 그림과 말로 본 해

- 공 안, 초기($ct < 1 - r$): 반지름 ct 인 구면이 아직 공 안에 있으므로 $u = t$ 이다. 처음 속도 1로 그대로 움직인다.

표 1: 두 방법의 비교 ($c = 1$)

r	t	구면 평균 공식	ru 의 1차원 해
0.3	0.5	0.500000	0.500000
0.3	1	0.425000	0.425000
2	1.5	0.093750	0.093750
2	2.5	0.093750	0.093750
4	4	0.062500	0.062500
4	5.5	0.000000	0.000000

- **퍼져 나가는 껍질:** 공의 경계에서 출발한 교란이 속도 c 로 퍼진다. 공 밖의 점 $r > 1$ 에는 시각 $(r-1)/c$ 에 파동이 도착한다. u 는 $t = r/c$ 에서 최대값 $1/(4cr)$ 이 되는 포물선 모양이고, 시각 $(r+1)/c$ 에 정확히 0으로 돌아간다(그림 2).
- **두께가 일정한 껍질:** 어느 순간 $t > 1/c$ 에서 0이 아닌 영역은 $ct-1 < r < ct+1$ 인 두께 2의 구각이다(그림 1). 진폭은 $1/r$ 로 줄어든다.
- **중심:** $r \rightarrow 0$ 이면 $u(0, t) = t$ ($ct < 1$)이고 $u(0, t) = 0$ ($ct > 1$)이다. 공의 경계에서 안쪽으로 모인 교란이 $t = 1/c$ 에 중심에 집중되었다가 사라지므로, 중심의 변위가 갑자기 0이 된다.

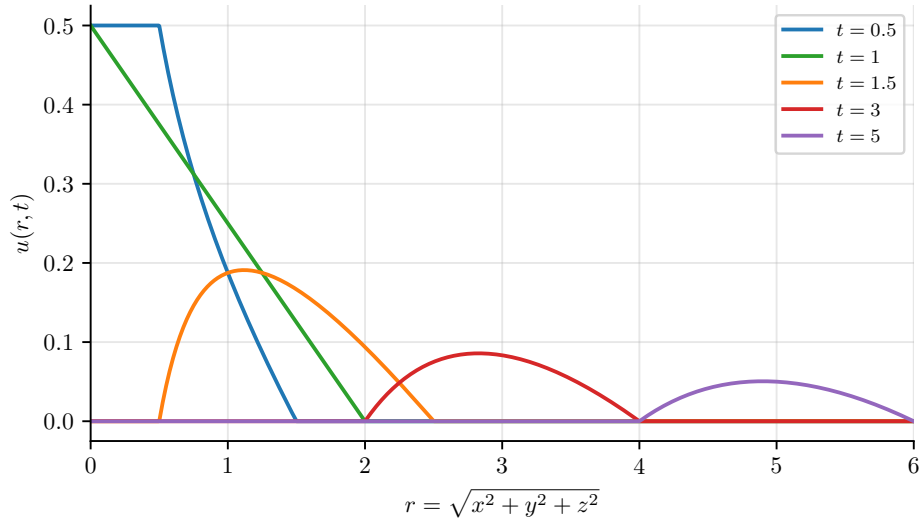


그림 1: 여러 시각에서의 $u(r, t)$ ($c = 1$). $t > 1$ 에서는 두께 2의 구각만 움직인다.

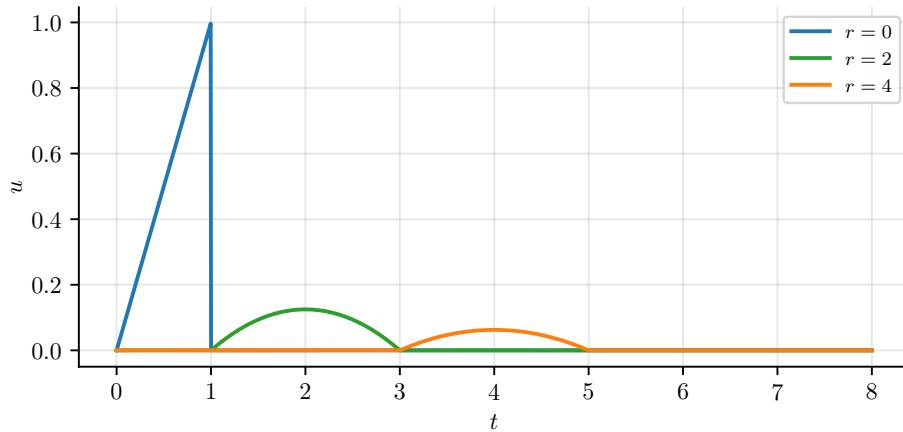


그림 2: 고정된 점에서의 시간 변화. 파동이 지나가면 변위가 정확히 0으로 돌아간다(날카로운 뒤끝).

비고. 고정된 점에서 교란이 유한한 시간 $2/c$ 동안만 지속되고 뒤끝이 날카롭게 끊기는 것이 3차원의 **Huygens** 원리이다. 초기 교란은 구면 위의 값만 해에 기여하므로, 교란 영역을 구면이 다 지나가면 영향이 남지 않는다. 그래서 3차원에서는 소리가 지나간 뒤 곧 조용해진다. 2차원 (§13.4의 다음 Example)과 1차원 (§13.3)에서는 이 원리가 성립하지 않는다.