

2차원 원통형파: 원판 모양의 초기 속도

Poisson 공식과 Huygens 원리의 실패
공학수학 II · 강의노트 §13.4 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, y, 0) &= 0, \quad u_t(x, y, 0) = \psi = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{그 밖} \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

앞 Example(3차원 공)과 같은 문제를 2차원 원판에 대해 풀고, 두 결과를 비교한다.

2 Poisson 공식 (하강법)

강의노트의 하강법 결과에 의해 $u(\cdot, 0) = 0$ 이면

$$u(P, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{|Q-P| < ct} \frac{\psi(Q)}{\sqrt{c^2 t^2 - |Q-P|^2}} dA_Q. \quad (2.1)$$

3차원과 달리 원의 둘레가 아니라 원판 내부 전체의 값을 적분한다. 점 P 를 중심으로 하는 극좌표 (ρ, ϑ) 를 쓰면

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{ct} \frac{\Theta(\rho; r) \rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (2.2)$$

여기서 $r = |P|$ 이고, $\Theta(\rho; r)$ 는 P 를 중심으로 하는 반지름 ρ 인 원 가운데 단위 원판 안에 들어가는 호의 중심각이다. $r + \rho \leq 1$ 이면 $\Theta = 2\pi$, $|r - \rho| < 1 < r + \rho$ 이면 $\Theta = 2 \arccos \frac{\rho^2 + r^2 - 1}{2\rho r}$, 그 밖에는 $\Theta = 0$ 이다.

3 원판 중심에서의 닫힌 해

$r = 0$ 이면 $\Theta = 2\pi$ ($\rho < 1$)이므로 적분을 직접 계산할 수 있다.

$$u(0, t) = \frac{1}{c} \int_0^{\min(ct, 1)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} = \frac{1}{c} \left[ct - \sqrt{c^2 t^2 - \min(ct, 1)^2} \right]. \quad (3.1)$$

최종 해

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{ct} \frac{\Theta(\rho; r) \rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} d\rho, \quad u(0, t) = \begin{cases} t, & ct \leq 1, \\ \frac{ct - \sqrt{c^2 t^2 - 1}}{c}, & ct > 1. \end{cases}$$

일반적인 r 에 대해서는 $\rho = ct \sin \theta$ 로 치환해 적분의 특이점을 없앤 뒤 수치적분하였다. 중심에서의 수치적분 값은 닫힌 형태와 일치한다(표 1).

4 3차원과의 비교

- 앞쪽 끝은 날카롭다: 점 $r > 1$ 에는 시각 $(r - 1)/c$ 이전에 아무 변화가 없다. 신호는 속도 c 보다 빨리 전달되지 않는다.

표 1: 원판 중심에서의 해 ($c = 1$)

t	닫힌 형태 $u(0, t)$	수치적분
0.5	0.500000	0.500000
1	1.000000	1.000000
2	0.267949	0.267949
5	0.101021	0.101021
10	0.050126	0.050126

- **뒤끝이 없다:** 파동이 지나간 뒤에도 변위가 0으로 돌아가지 않고 천천히 줄어든다. 중심에서는 $ct \gg 1$ 일 때 $u(0, t) \approx \frac{1}{2c^2t}$ 이다. 3차원에서는 $t > 1/c$ 이후 $u(0, t) = 0$ 이었다(그림 2).
- **이유:** 2차원 문제는 z 방향으로 무한히 긴 원기둥 모양의 초기 속도를 준 3차원 문제와 같다(하강법). 원기둥의 먼 부분에서 출발한 교란이 늦게 도착하므로 꼬리가 길게 남는다. 이것이 2차원에서 Huygens 원리가 성립하지 않는 이유이다.

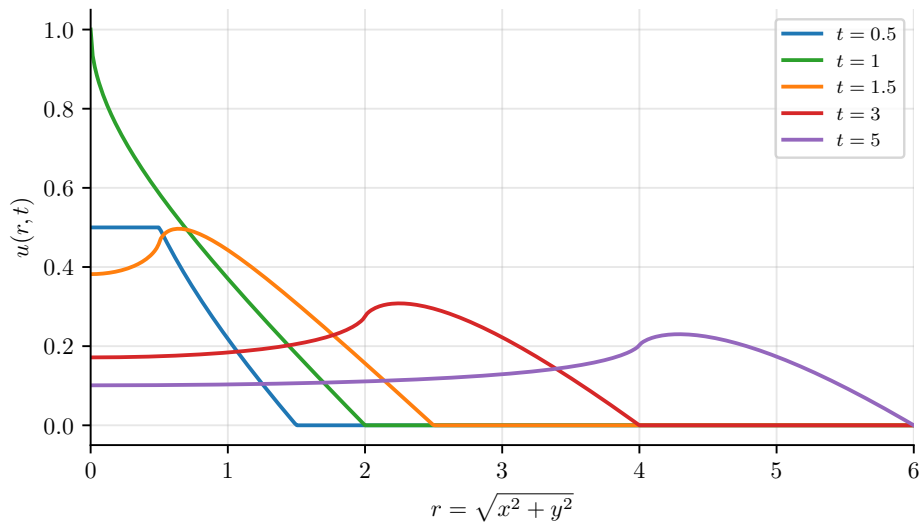


그림 1: 여러 시각에서의 $u(r, t)$ ($c = 1$). 3차원과 달리 파면 뒤쪽($r < ct - 1$)에도 변위가 남는다.

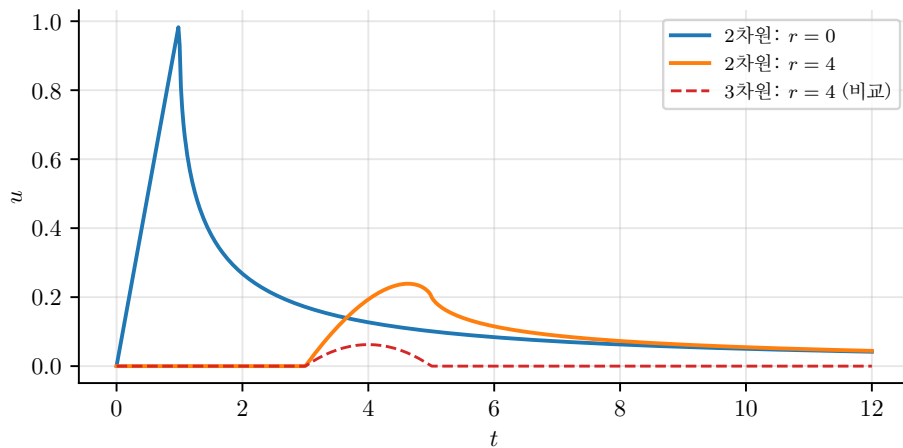


그림 2: 2차원 해의 시간 변화와 3차원 해(점선)의 비교. 2차원 해에는 긴 꼬리가 있다.

비고. 2차원에서 파면의 진폭은 대략 $1/\sqrt{r}$ 로 줄어든다(3차원은 $1/r$). 물결이 퍼질 때 원 둘레가 r 에 비례해 늘어나므로, 에너지 밀도가 $1/r$ 로 줄고 진폭은 그 제곱근으로 줄어든다.