

유한 현의 진동: 초기 변위가 주어진 경우

고유함수로 이루어진 초기조건과 정상파의 중첩

공학수학 II · 강의노트 §13.6 Example 풀이

1 문제

양 끝이 고정된 현 (1.1)에서 초기조건이 다음과 같을 때의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0, & \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{L} + 0.5 \sin \frac{3\pi x}{L}, & u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

2 풀이

변수분리로 얻은 일반해는 (강의노트 §13.6)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.1)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L u_t(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.2)$$

초기 속도가 0이므로 모든 $b_n = 0$ 이다. 초기 변위는 고유함수 두 개의 합이므로, 직교성에 의해 적분을 계산하지 않아도 $a_1 = 1$, $a_3 = 0.5$ 이고 나머지 $a_n = 0$ 이다.

최종 해

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi ct}{L} \sin \frac{\pi x}{L} + 0.5 \cos \frac{3\pi ct}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (2.3)$$

검산. 각 항이 파동방정식과 경계조건을 만족하고, $t = 0$ 에서 초기 변위와 같으며, $u_t(x, 0) = 0$ 이다.

3 해의 성질

- 해는 두 정상파의 합이다. 기본 모드($n = 1$)는 각진동수 $\pi c/L$ 로, 3차 모드는 그 3배인 $3\pi c/L$ 로 진동한다.
- 3차 모드의 주기가 기본 모드 주기의 $1/3$ 이므로 전체 운동은 주기 $T = 2L/c$ 인 주기 운동이다. $t = L/c$ (반주기)에는 $u = -u(x, 0)$ 으로 모양이 정확히 뒤집힌다(그림 1).
- 같은 해를 D'Alembert 꼴로 쓸 수도 있다. 초기 변위를 홀함수이면서 주기 $2L$ 인 함수 $\tilde{f}$ 로 확장하면 $u = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)]$ 이다. 이 문제의 초기 변위는 이미 그런 함수이므로 확장할 필요가 없다. 두 표현은 삼각함수 합공식 $\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(B - A) + \sin(B + A)]$ 로 같음을 보일 수 있다(표 1).

표 1: 정상파 표현과 D'Alembert 표현의 비교 ($L = c = 1$)

x	t	급수해	D'Alembert
0.3	0.2	0.606763	0.606763
0.5	0.7	-1.063314	-1.063314
0.8	1.3	0.106763	0.106763
0.25	2	1.060660	1.060660

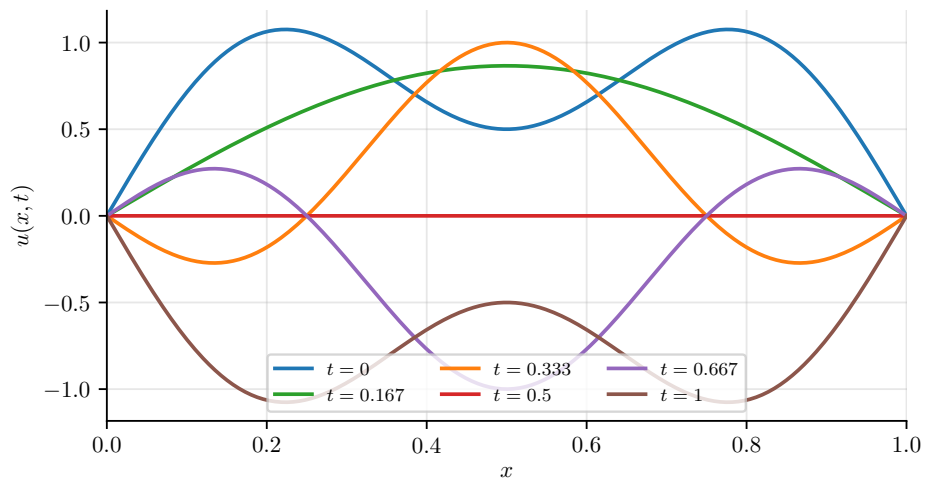


그림 1: 반주기 동안의 현의 모양 ($L = c = 1$, 주기 $T = 2$).