유한 현의 진동: 초기 속도가 주어진 경우

한 개의 정상파 모드

공학수학 II · 강의노트 §13.6 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ &u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2 풀이

일반해 $u = \sum_n \left[a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$ 에서 초기 변위가 0이므로 $a_n = 0$이다. 초기 속도 조건은

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = \sin\frac{3\pi x}{L} \tag{2.1}$$

이다. 직교성에 의해 $n = 3$인 항만 남고 $b_3 \cdot \dfrac{3\pi c}{L} = 1$, 즉 $b_3 = \dfrac{L}{3\pi c}$이다. (공식 $b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L u_t(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$에 넣어도 $\int_0^L \sin^2\frac{3\pi x}{L}dx = \frac{L}{2}$이므로 같은 값이 나온다.)

최종 해

$$u(x,t) = \frac{L}{3\pi c}\,\sin\frac{3\pi ct}{L}\,\sin\frac{3\pi x}{L} \tag{2.2}$$

검산. $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \frac{L}{3\pi c}\cdot\frac{3\pi c}{L}\sin\frac{3\pi x}{L} = \sin\frac{3\pi x}{L}$ 이고, $x = 0, L$에서 0이다.

3 해의 성질

- 3차 모드 하나만 진동하므로 $x = L/3$과 $x = 2L/3$은 항상 움직이지 않는 **마디**(node)이다(그림 1).
- 진동 주기는 $2L/(3c)$이다. 진폭 $L/(3\pi c)$는 초기 속도의 크기 1을 각진동수 $3\pi c/L$로 나눈 값이다. 같은 초기 속도라도 높은 모드일수록 진폭이 작다.
- 변위가 최대가 되는 순간($\sin\frac{3\pi ct}{L} = \pm 1$)에는 속도가 0이고, 변위가 0인 순간에는 속도가 최대이다. 운동에너지와 위치에너지가 서로 바뀌면서 총에너지는 보존된다.

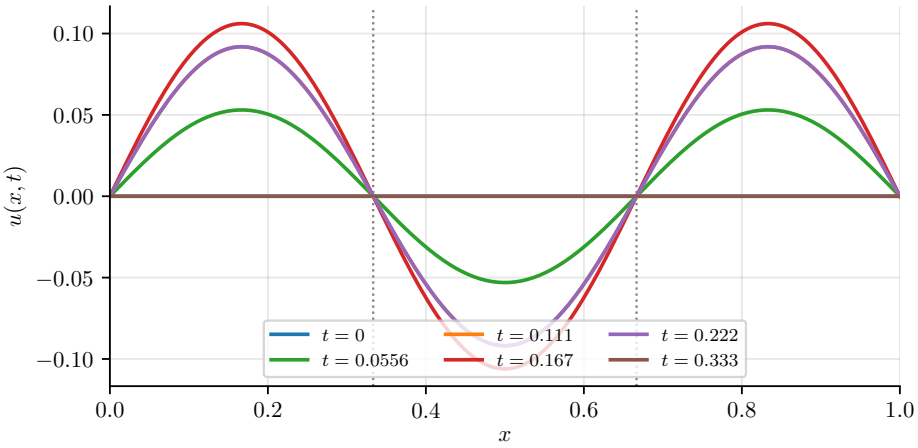

그림 1: 반주기 동안의 현의 모양 ($L = c = 1$). 점선은 마디 $x = 1/3,\ 2/3$이다.