

감쇠가 있는 유한 현의 진동

모드별 감쇠 진동자와 세 가지 감쇠 형태

공학수학 II · 강의노트 §13.6 Example 풀이

1 문제

$\beta > 0$ 일 때 다음 문제를 푼다.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} - \beta u_t, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$-\beta u_t$ 는 속도에 비례하는 저항(공기 저항 등)이다. PDE와 경계조건이 선형 동차이므로 변수분리를 쓸 수 있다.

2 변수분리

$u = X(x)T(t)$ 를 대입하면 $\frac{T'' + \beta T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ 이고, 경계조건에서 $X_n = \sin n\pi x$, $\lambda_n = (n\pi)^2$ 이다. 시간 함수는

$$T_n'' + \beta T_n' + \omega_n^2 T_n = 0, \quad \omega_n = n\pi c, \quad (2.1)$$

즉 모드마다 하나씩 있는 감쇠 조화진동자이다. 특성방정식 $r^2 + \beta r + \omega_n^2 = 0$ 의 근은 $r = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega_n^2}$ 이다. 초기조건 $T_n(0) = b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$, $T_n'(0) = 0$ 을 만족하는 해는 다음 세 경우로 나뉜다.

$$T_n(t) = \begin{cases} b_n e^{-\beta t/2} \left[\cos \nu_n t + \frac{\beta}{2\nu_n} \sin \nu_n t \right], & \omega_n > \beta/2 \text{ (미감쇠)}, \quad \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2/4}, \\ b_n e^{-\beta t/2} \left(1 + \frac{\beta}{2} t \right), & \omega_n = \beta/2 \text{ (임계감쇠)}, \\ b_n \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1}, & \omega_n < \beta/2 \text{ (과감쇠)}, \quad r_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega_n^2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

최종 해

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, \quad (2.3)$$

여기서 T_n 은 위의 세 경우 가운데 $\omega_n = n\pi c$ 와 $\beta/2$ 의 크기에 맞는 식이다.

3 감쇠 형태의 의미

ω_n 은 n 에 따라 커지므로 높은 모드는 항상 미감쇠이다. 과감쇠가 될 수 있는 것은 $n\pi c < \beta/2$ 인 낮은 모드뿐이다.

- $\beta < 2\pi c$: 모든 모드가 미감쇠이다. 현은 진동하면서 진폭이 $e^{-\beta t/2}$ 로 줄어든다. 진동수는 감쇠가 없을 때보다 조금 낮아진다($\nu_n < \omega_n$).
- $\beta > 2\pi c$: 기본 모드가 과감쇠가 되어 진동하지 않고 천천히 0으로 돌아간다. 이때 가장 느린 감쇠율은 $|r_1| = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \pi^2 c^2}$ 로, β 가 클수록 오히려 느려진다. 저항이 너무 크면 현이 끈적한 매질 속에서처럼 천천히 움직인다.

그림 1은 $f(x) = x(1-x)$ ($b_n = 8/(n\pi)^3$, n 홀수), $c = 1$ 일 때 현의 가운데 점의 운동이다. $\beta = 2\pi$ 에서 기본 모드가 임계감쇠가 되어 가장 빨리 진동 없이 안정된다.

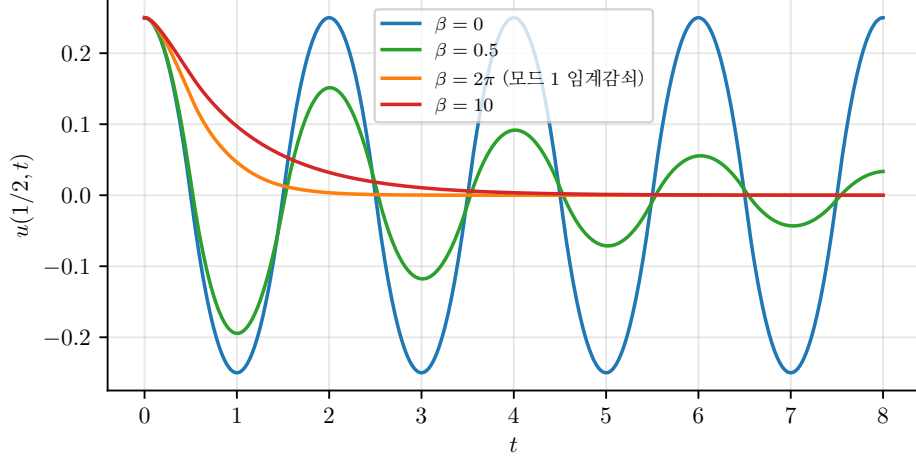


그림 1: $f = x(1 - x)$, $c = 1$ 일 때 $u(1/2, t)$. $\beta = 10$ 이면 기본 모드가 과감쇠되어 천천히 돌아온다.

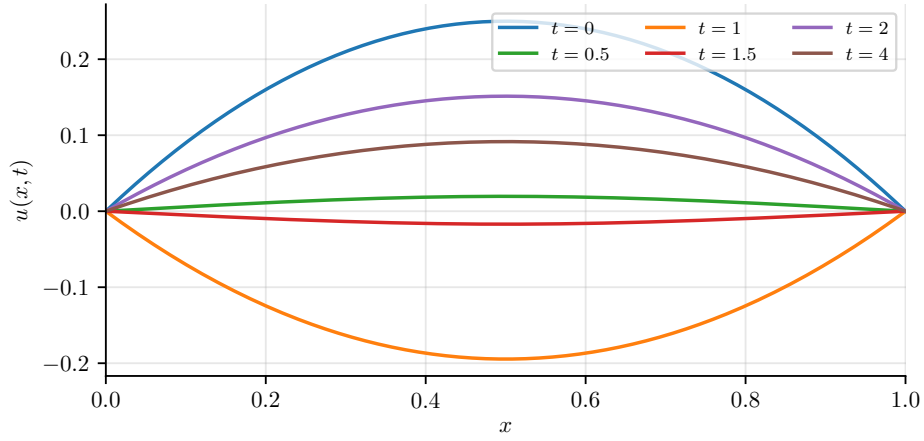


그림 2: $\beta = 0.5$ 일 때 현의 모양. 진동하면서 진폭이 줄어든다.

4 에너지 감소

에너지 $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$ 를 미분하고 부분적분하면(경계에서 $u_t = 0$)

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx = \int_0^1 u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = -\beta \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0. \quad (4.1)$$

따라서 감쇠항은 에너지를 계속 소모한다. 감쇠가 없으면($\beta = 0$) 에너지가 보존된다.

5 수치 검증

$f = x(1 - x)$, $c = 1$, $\beta = 0.5$ 인 경우를 유한차분(격자 401개)으로 풀어 급수해(모드 199개)와 비교하였다(표 1).

비고. 미감쇠 모드들은 모두 같은 포락선 $e^{-\beta t/2}$ 로 줄어든다. 따라서 $\beta < 2\pi c$ 이면 시간이 지나도 현의 모양이 기본 모드로 단순해지지 않는다. 모양은 그대로 유지한 채 진동하며 전체가 작아질 뿐이다. 이 점이 높은 모드가 훨씬 빨리 사라지는 열방정식과 다르다. 반면 $\beta > 2\pi c$ 이면 과감쇠된 기본 모드의 감쇠율 $|r_1|$ 이 $\beta/2$ 보다 작으므로, 오랜 시간이 지난 뒤에는 기본 모드 $\sin \pi x$ 만 남는다.

표 1: 급수해와 유한차분 수치해의 비교 ($\beta = 0.5$)

t	$u(1/2, t)$ 급수해	$u(1/2, t)$ 수치해	$\max u_{\text{FD}} - u $
0.5	0.019594	0.019627	3.4×10^{-5}
1	-0.194531	-0.194531	2.1×10^{-5}
2	0.151354	0.151354	2.6×10^{-5}
4	0.091594	0.091594	2.5×10^{-5}