

원형 막(드럼)의 진동

Fourier-Bessel 급수와 Bessel 함수 항등식

공학수학 II · 강의노트 §13.8 Example 풀이

1 문제

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \nabla^2 u, & 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1, \theta, t) &= 0, \\ u(r, \theta, 0) &= 1 - r^2, & u_t(r, \theta, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

가장자리가 고정된 단위 원형 막을 포물면 $1 - r^2$ 모양으로 눌렀다가 놓는 상황이다($c = 1$).

2 풀이의 형태

초기조건이 θ 에 무관하므로 해도 θ 에 무관하다($n = 0$ 인 경우). 강의노트 §13.8의 결과에 의해

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} J_0(\alpha_{0m} r) \cos(\alpha_{0m} t), \quad A_{0m} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_{0m})} \int_0^1 r f(r) J_0(\alpha_{0m} r) dr, \quad (2.1)$$

이고, α_{0m} 은 J_0 의 m 번째 양의 근, $f(r) = 1 - r^2$ 이다.

3 계수의 계산

$\alpha = \alpha_{0m}$ 로 쓰고, Bessel 함수의 미분 공식

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x), \quad \frac{d}{dx} [x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x) \quad (3.1)$$

를 쓴다. 첫째 식에서 $\int_0^1 r J_0(\alpha r) dr = J_1(\alpha)/\alpha$ 이다. $\int_0^1 r^3 J_0(\alpha r) dr$ 는 r^2 과 $r J_0(\alpha r) dr$ 로 나누어 부분적분하면

$$\int_0^1 r^3 J_0(\alpha r) dr = \left[\frac{r^3 J_1(\alpha r)}{\alpha} \right]_0^1 - \frac{2}{\alpha} \int_0^1 r^2 J_1(\alpha r) dr = \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} - \frac{2J_2(\alpha)}{\alpha^2}. \quad (3.2)$$

따라서 $\int_0^1 r(1 - r^2) J_0(\alpha r) dr = \frac{2J_2(\alpha)}{\alpha^2}$ 이다. 점화식 $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ 과 $J_0(\alpha) = 0$ 을 쓰면 $J_2(\alpha) = 2J_1(\alpha)/\alpha$ 이므로

$$\int_0^1 r(1 - r^2) J_0(\alpha r) dr = \frac{4J_1(\alpha)}{\alpha^3}, \quad A_{0m} = \frac{2}{J_1^2(\alpha)} \cdot \frac{4J_1(\alpha)}{\alpha^3} = \frac{8}{\alpha_{0m}^3 J_1(\alpha_{0m})}. \quad (3.3)$$

최종 해

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\alpha_{0m}^3 J_1(\alpha_{0m})} J_0(\alpha_{0m} r) \cos(\alpha_{0m} t), \quad J_0(\alpha_{0m}) = 0. \quad (3.4)$$

4 해의 성질

4.1 급수의 수렴

$J_1(\alpha_{0m})$ 의 부호가 번갈아 바뀌고 크기는 $\sqrt{2/(\pi\alpha_{0m})}$ 정도이다. 따라서 계수는 $|A_{0m}| \sim \alpha_{0m}^{-5/2}$ 로 빠르게 줄어든다. 초기 변위 $1 - r^2$ 이 경계에서 0이라 매끄럽기 때문이다. 처음 몇 항만으로도 초기조건을 잘 재현한다(표 2). 첫째 항 하나만 써도 초기 모양과의 최대 오차가 약 0.11이고(중심값 $A_{01} = 1.108$, 정확값 1), 10항이면 10^{-3} 수준이 된다.

표 1: 처음 여섯 개의 근과 계수 (수치적분 결과와 10^{-15} 이내로 일치)

m	α_{0m}	$J_1(\alpha_{0m})$	$A_{0m} = 8/(\alpha_{0m}^3 J_1(\alpha_{0m}))$
1	2.404826	+0.519147	+1.108022
2	5.520078	-0.340265	-0.139778
3	8.653728	+0.271452	+0.045476
4	11.791534	-0.232460	-0.020991
5	14.930918	+0.206546	+0.011636
6	18.071064	-0.187729	-0.007221

표 2: $t = 0$ 에서 급수의 수렴

항 수 m	$u(0, 0)$	$\max_r u(r, 0) - (1 - r^2) $
1	1.108022	1.1×10^{-1}
2	0.968245	3.2×10^{-2}
3	1.013721	1.4×10^{-2}
5	1.004367	4.4×10^{-3}
10	0.999157	9.5×10^{-4}

4.2 주기적이지 않은 운동

현(1차원)에서는 진동수가 기본 진동수의 정수배였으므로 운동이 주기적이었다. 그러나 드럼의 진동수 $\alpha_{01} : \alpha_{02} : \alpha_{03} \approx 2.405 : 5.520 : 8.654$ 는 정수비가 아니다. 그래서 처음 모양 $1 - r^2$ 으로 정확히 돌아오지 않는다(그림 2). 이것이 드럼 소리가 현악기처럼 맑은 음높이를 갖지 않는 이유이다. 다만 첫째 모드가 대부분을 차지하므로, 중심의 운동은 주기 $2\pi/\alpha_{01} \approx 2.61$ 에 가까운 진동에 작은 흔들림이 더해진 모양이다.

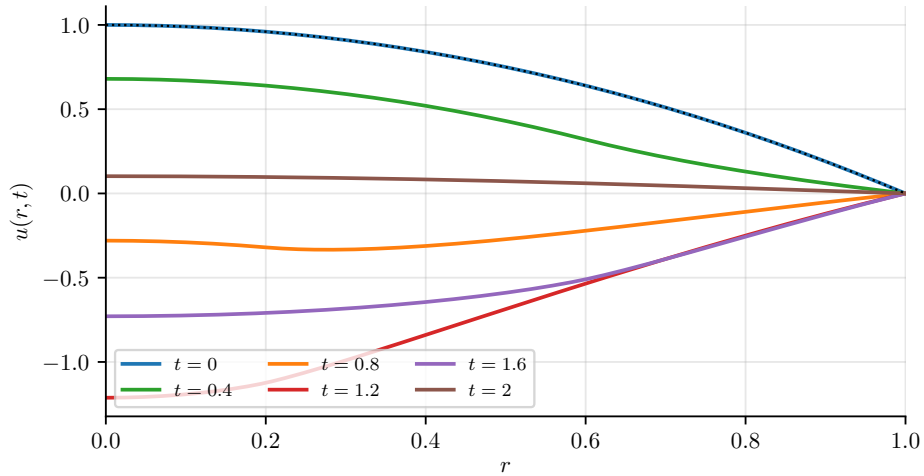


그림 1: 여러 시각에서 막의 단면 $u(r, t)$. 점선은 초기 모양 $1 - r^2$ 이다.

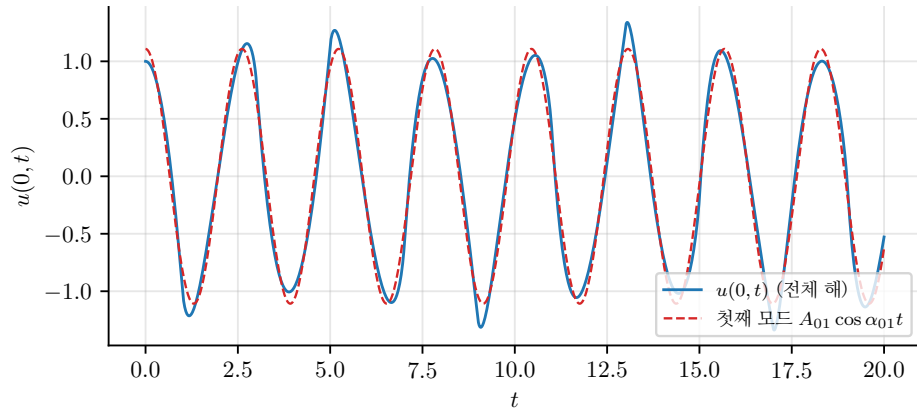


그림 2: 막 중심의 변위. 첫째 모드(점선)에 높은 모드의 작은 진동이 더해져 있다.

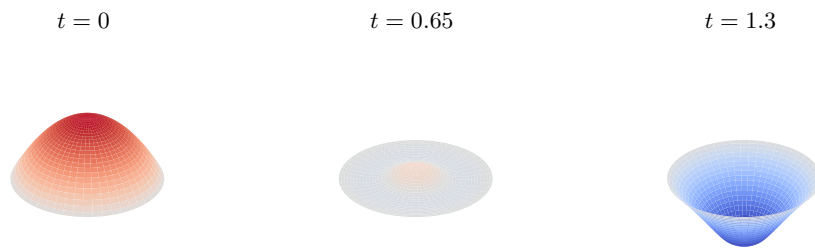


그림 3: 막의 모양. 첫째 모드의 반주기(≈ 1.3) 동안 위로 볼록한 모양이 아래로 볼록하게 바뀐다.