

대류 방정식에서 속도 v 없애기

좌표의 크기 조정과 이동 좌표계

공학수학 II · 강의노트 §13.9 Example 풀이

1 문제

다음 방정식에서 v 가 사라지도록 새로운 공간 변수 ξ 를 고르는 방법을 묻는다($v > 0$ 은 일정한 속도).

$$u_t + v u_x = 0. \quad (1.1)$$

2 풀이 1: 공간 변수의 크기 조정

§13.9의 무차원화와 같은 방법으로 $\xi = x/k$ (k 는 상수)로 놓는다. 연쇄법칙에 의해 $u_x = u_\xi \xi_x = u_\xi/k$ 이므로

$$u_t + \frac{v}{k} u_\xi = 0. \quad (2.1)$$

$k = v$ 로 고르면 v 가 사라진다.

답

$$\xi = \frac{x}{v} \implies u_t + u_\xi = 0.$$

$\xi = x/v$ 는 “속도 v 로 거리 x 를 가는 데 걸리는 시간”이므로 t 와 같은 시간의 단위를 갖는다. 완전히 무차원인 변수를 원하면 대표 길이 L 을 써서 $\xi = x/L$, $\tau = vt/L$ 로 두면 된다. 그러면 역시 $u_\tau + u_\xi = 0$ 이 된다.

3 풀이 2: 이동 좌표계

공간 변수를 시간에 따라 움직이는 좌표 $\xi = x - vt$ ($\tau = t$)로 바꾸면 $u_t = u_\tau - v u_\xi$, $u_x = u_\xi$ 이므로

$$u_\tau = 0. \quad (3.1)$$

v 뿐 아니라 공간 미분항까지 모두 사라진다. 따라서 u 는 ξ 만의 함수이고, 일반해는

$$u(x, t) = F(x - vt) \quad (3.2)$$

이다. 초기 모양 $F(x) = u(x, 0)$ 이 모양을 유지한 채 속도 v 로 오른쪽으로 이동한다. 특성선 $x - vt =$ 일정을 따라 u 가 일정하다(그림 1). 이것은 §12.16에서 확산-대류 방정식을 풀 때 쓴 좌표 $\xi = x - Vt$ 와 같은 아이디어이다.

비고. 두 방법의 목적이 다르다. 크기 조정(풀이 1)은 방정식의 계수를 1로 만드는 것이고, 문제의 유형은 그대로이다. 이동 좌표계(풀이 2)는 파동을 따라가며 관찰하는 것으로, 방정식을 가장 간단한 형태로 바꿔 해를 바로 얻게 해 준다.

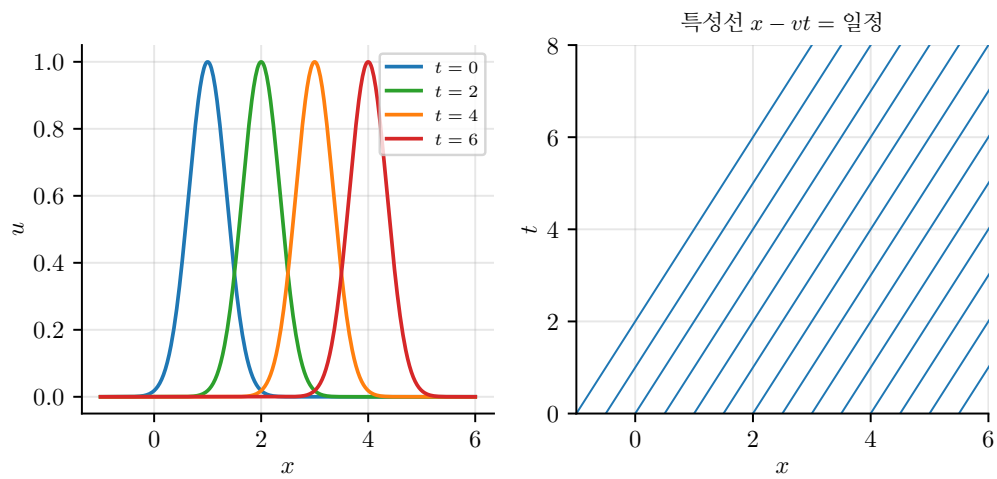


그림 1: $v = 0.5$ 일 때 $u = F(x - vt)$ 의 이동(왼쪽)과 특성선(오른쪽).