

반지름에만 의존하는 파동방정식 (극좌표)

원통 대칭 파동과 Bessel 방정식

공학수학 II · 강의노트 §14.1 Example 풀이

1 문제

파동방정식 $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ 를 극좌표로 쓰되, 해 u 가 r 와 t 에만 의존한다는 것을 알 때 방정식이 어떻게 되는지 묻는다.

2 풀이

§14.1에서 유도한 극좌표 Laplacian은

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}. \quad (2.1)$$

u 가 θ 에 무관하면 $u_{\theta\theta} = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

답

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (2.2)$$

둘째 표현은 $\frac{1}{r}(ru_r)_r = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$ 에서 나온다. 이 꼴은 원통 대칭인 열·파동 문제에서 자주 쓰인다.

3 보충: 이 방정식의 해

- 계수가 상수가 아니다. $\frac{1}{r}u_r$ 항 때문에 계수가 r 에 의존한다. 3차원 구대칭 경우($u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$)에는 $v = ru$ 로 놓으면 1차원 파동방정식이 되지만, 2차원에서는 이런 간단한 치환이 없다.
- 변수분리. $u = R(r)T(t)$ 로 두면 $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + R'/r}{R} = -k^2$ 이고

$$T'' + c^2 k^2 T = 0, \quad r^2 R'' + r R' + k^2 r^2 R = 0. \quad (3.1)$$

둘째 식은 0차 Bessel 방정식이고, $r = 0$ 에서 유한한 해는 $R = J_0(kr)$ 이다. 따라서 $u = J_0(kr)[A \cos ckt + B \sin ckt]$ 꼴의 해들이 있다.

- 드럼과의 관계. 반지름 1인 원형 막의 가장자리를 고정하면($u(1, t) = 0$) $J_0(k) = 0$ 이어야 한다. 따라서 $k = \alpha_{0m}$ (J_0 의 근)이고, 이것이 §13.8에서 다룬 θ 에 무관한 드럼의 진동 모드이다(그림 1).

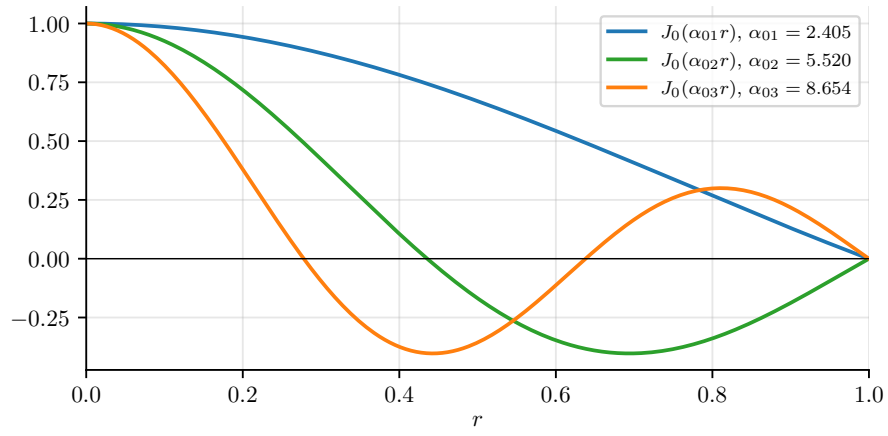


그림 1: $u(1, t) = 0$ 인 원형 막에서 반지름에만 의존하는 처음 세 모드의 모양 $J_0(\alpha_{0m}r)$.