

구대칭 Laplace 방정식과 그 해

3차원의 구대칭 퍼텐셜 $a + b/r$

공학수학 II · 강의노트 §14.1 Example 풀이

1 문제

해 u 가 r 에만 의존할 때 구면좌표에서 Laplace 방정식은 어떻게 되는가? 그 해를 모두 구하라. (3차원의 구대칭 퍼텐셜이다.)

2 방정식

§14.1의 구면좌표 Laplacian은

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \phi} (\sin \phi u_\phi)_\phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} u_{\theta\theta}. \quad (2.1)$$

$u = u(r)$ 이면 $u_\phi = u_\theta = 0$ 이므로 Laplace 방정식은

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u'' + \frac{2}{r} u' = 0. \quad (2.2)$$

3 풀이

양변에 r^2 를 곱하고 적분하면 $r^2 u' = -b$ (b 는 상수), 즉 $u' = -b/r^2$ 이다. 다시 적분하면 다음을 얻는다.

최종 해

$$u(r) = a + \frac{b}{r}, \quad a, b \text{는 임의의 상수.} \quad (3.1)$$

검산. $u' = -b/r^2$ 이므로 $r^2 u' = -b$ 이고, $(r^2 u')' = 0$ 이다.

4 해의 의미

- 상수 a : 퍼텐셜의 기준값(더해도 물리량이 바뀌지 않음).
- $1/r$: 원점에 놓인 점전하(또는 점질량)의 퍼텐셜이다. 이것을 Newton 퍼텐셜이라 한다. $r = 0$ 에서 발산하므로, 원점을 포함하는 영역에서 유한한 해를 원하면 $b = 0$ 이어야 한다.
- 원점에서 퍼져 나가는 “유속” $-4\pi r^2 u' = 4\pi b$ 는 r 에 무관하다. 즉 어느 구면을 통과하는 총 유속이나 같으므로, $r > 0$ 에서는 원천이 없다는 뜻이다.

5 예: 두 동심구 사이

$u(R_1) = A, u(R_2) = B$ ($R_1 < R_2$)이면 두 조건에서 a, b 를 정해

$$u(r) = (A - B) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r} + \frac{R_2 B - R_1 A}{R_2 - R_1} \quad (5.1)$$

이다(강의노트 §14.5의 Example). 1차원 막대의 직선 분포와 달리 $1/r$ 모양이므로 안쪽 구 근처에서 변화가 크다(그림 1).

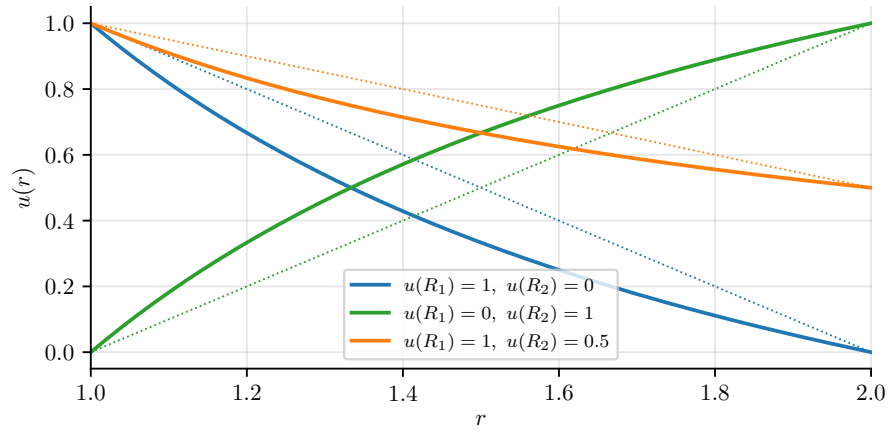


그림 1: 두 동심구($R_1 = 1, R_2 = 2$) 사이의 퍼텐셜(실선)과 같은 경계값을 잇는 직선(점선).

비고. 차원에 따른 “반지름에만 의존하는” 조화함수를 비교하면 다음과 같다. 1차원은 $a + bx$, 2차원은 $a + b \ln r$, 3차원은 $a + b/r$ 이다. 2차원의 $\ln r$ 은 무한히 멀리서 발산하지만 3차원의 $1/r$ 은 0으로 간다. 그래서 3차원 외부 문제에서 상수 경계값의 해는 $3/r$ 처럼 무한히 멀리서 0이 되고, 2차원에서는 상수가 된다 (§14.4, §14.5 참조).