

Neumann 문제의 해의 존재 조건

경계 유속의 총합이 0이어야 하는 이유

공학수학 II · 강의노트 §14.2 Example 풀이

1 문제

다음 Neumann 문제는 원 안에서 해를 갖는가?

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0 < r < 1), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = \sin^2 \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi). \quad (1.1)$$

2 호환 조건

$\nabla^2 u = 0$ 을 원판 D 에서 적분하고 발산정리를 쓰면

$$0 = \iint_D \nabla^2 u \, dA = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_0^{2\pi} u_r(1, \theta) \, d\theta. \quad (2.1)$$

따라서 Neumann 문제가 해를 가지려면 경계에서 주어진 유속의 총합이 0이어야 한다 (§14.2). 이 문제에서는

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi \neq 0. \quad (2.2)$$

답

경계 유속의 총합이 $\pi \neq 0$ 이므로 호환 조건을 만족하지 않는다. 따라서 이 Neumann 문제는 해를 갖지 않는다.

3 급수로 본 이유

원 안의 조화함수는 $u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ 이므로 $u_r(1, \theta) = \sum_{n \geq 1} n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ 이다. 여기에는 상수항이 없다. 그런데 $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ 에는 상수항 $\frac{1}{2}$ 이 있으므로 어떤 계수로도 맞출 수 없다(그림 1). 상수항을 뺀 경계조건 $u_r(1, \theta) = -\frac{1}{2} \cos 2\theta$ 라면 $2a_2 = -\frac{1}{2}$ 에서 해 $u = -\frac{r^2}{4} \cos 2\theta + C$ 가 존재한다(C 는 임의의 상수).

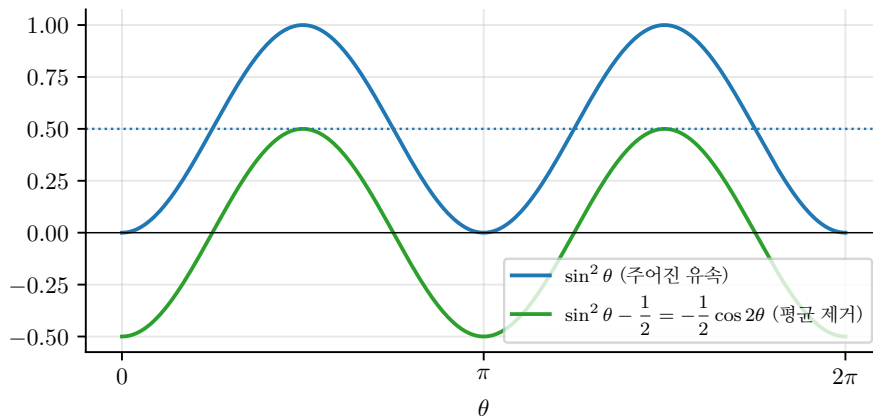


그림 1: 주어진 경계 유속 $\sin^2 \theta$ 는 평균이 $\frac{1}{2}$ 이다. 평균을 빼야 정상해가 존재한다.

4 물리적 해석: 정상상태가 없다

u 를 온도로 보면 $u_r = \sin^2 \theta \geq 0$ 은 경계 어디서나 열이 들어오거나(0이 아닌 곳) 막혀 있다는 뜻이다. 열이 나가는 곳이 없으므로 온도가 계속 올라가고 정상상태에 이를 수 없다. 실제로 열방정식 $u_t = \nabla^2 u$ 를 같은 경계조건과 $u(r, \theta, 0) = 0$ 으로 풀면

$$u(r, \theta, t) = t + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{8} + (\text{시간에 따라 사라지는 항}) \quad (4.1)$$

이다. $U = t + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \cos 2\theta$ 는 $U_t = \nabla^2 U = 1$, $U_r(1, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta = \sin^2 \theta$ 를 만족한다. 평균 온도는 $\bar{u} = \frac{1}{\pi} \iint_D u \, dA = t$ 로 시간에 비례해 끝없이 증가한다(그림 2). 들어오는 총 열량 π 를 넓이 π 로 나눈 비율 1로 평균 온도가 올라가는 것이다.

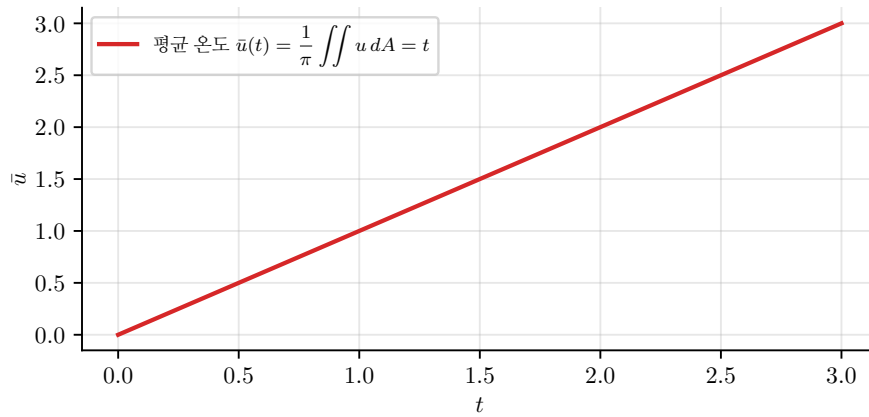


그림 2: 같은 경계 유속을 주었을 때 열방정식 해의 평균 온도. 정상상태에 이르지 않는다.

비고. 호환 조건을 만족하는 Neumann 문제의 해도 상수만큼의 자유도가 남아 유일하지 않다. 해를 하나로 정하려면 한 점의 값이나 평균값 같은 추가 정보가 필요하다.