Robin 경계조건을 갖는 원판의 정상 온도

h에 따른 Neumann과 Dirichlet 사이의 변화

공학수학 II · 강의노트 §14.2 Example 풀이

1 문제

여러 $h>0$에 대해 다음 문제의 해 $u(r,\theta)$를 상상해 보라.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0<r<1), \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + h\big(u - \sin\theta\big) = 0 \quad (r=1). \tag{1.1}$$

경계에서의 열 교환이 Newton 냉각 법칙을 따르고, 주위 온도가 $\sin\theta$인 상황이다. h는 열전달의 세기이다.

2 풀이

원 안의 유계인 조화함수는

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta\big). \tag{2.1}$$

$r=1$에서 $u_r = \sum n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$이므로 경계조건은

$$h\,\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+h)\big(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\big) = h\sin\theta. \tag{2.2}$$

계수를 비교하면 $h\,a_0/2 = 0$, $(1+h)\,b_1 = h$이고 나머지 계수는 모두 0이다.

최종 해

$$u(r,\theta) = \frac{h}{1+h}\, r\sin\theta \tag{2.3}$$

검산. $r\sin\theta = y$는 조화함수이다. $r=1$에서 $u_r + hu = \frac{h}{1+h}\sin\theta + \frac{h^2}{1+h}\sin\theta = h\sin\theta$이다(표 1).

3 h에 따른 해의 모양

- 해의 모양 $r\sin\theta = y$는 h와 관계없이 같고, 진폭 $h/(1+h)$만 달라진다. 등온선은 수평선 $y=$ 일정이다(그림 1).
- $h\to\infty$ (열 교환이 매우 강함): $u \to r\sin\theta$이다. 경계 온도가 주위 온도와 같아지므로 Dirichlet 문제 $u(1,\theta)=\sin\theta$의 해가 된다.
- $h\to 0$ (거의 단열): 진폭이 h 정도로 작아진다. 경계로 열이 거의 드나들지 못하므로 주위 온도의 영향이 약하다. $h=0$이면 단열 Neumann 문제가 되어 해가 임의의 상수로 바뀐다(유일하지 않음).
- 경계 온도는 주위 온도 $\sin\theta$의 $h/(1+h)$배로, 항상 주위보다 진폭이 작다(그림 2). 위쪽($\sin\theta>0$)에서는 열이 들어오고 아래쪽에서는 나간다. 총 유속은 0이다.

비고. 주위 온도가 일반적인 $g(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)$이면 같은 방법으로 $u = \frac{c_0}{2} + \sum_{n\ge 1}\frac{h}{n+h}\,r^n(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)$이다. 높은 모드일수록 계수 $h/(n+h)$가 작다. 경계 온도가 주위 온도의 변화를 매끄럽게 따라가는 셈이다.

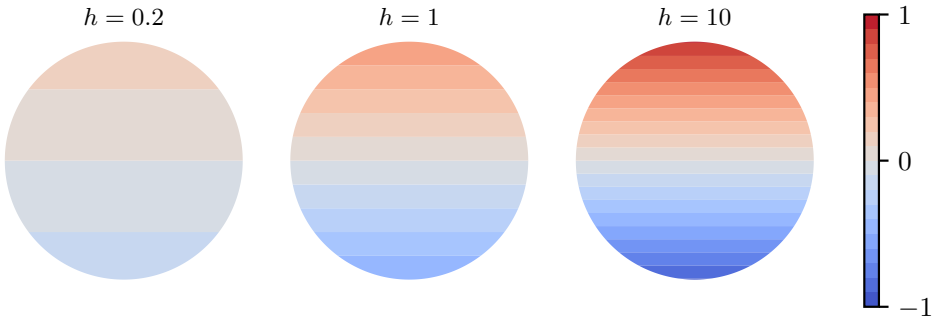

그림 1: $h = 0.2,\ 1,\ 10$일 때의 온도 분포. 모양은 같고 진폭만 다르다.

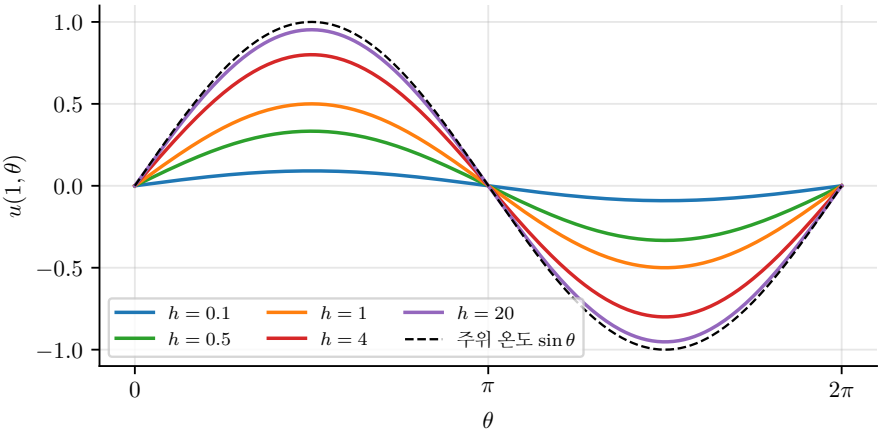

그림 2: 경계 온도 $u(1,\theta)$와 주위 온도 $\sin\theta$(점선).

표 1: $\theta = \pi/2$에서 경계조건 확인: 들어오는 열 $h(\sin\theta - u)$와 전도 열 u_r이 같다.

h	$A = \frac{h}{1+h}$	경계 유속 $u_r(1,\pi/2) = A$	$h\,[\sin\theta - u]_{\theta=\pi/2}$
0.1	0.0909	0.0909	0.0909
1	0.5000	0.5000	0.5000
10	0.9091	0.9091	0.9091
100	0.9901	0.9901	0.9901