

해를 구하지 않고 해곡선 그리기

방향장과 자율 미분방정식의 상선(phase line)

공학수학 I · 강의노트 §2.1 Example 풀이

1 방향장: $y' = x^2 - y^2$

문제. 주어진 방향장을 이용해 (a) $y(-2) = 1$, (b) $y(-1) = -1$, (c) $y(0) = 2$, (d) $y(0) = 0$ 을 지나는 해곡선을 대략 그린다.

읽는 법. 기울기 $x^2 - y^2$ 의 부호는 두 직선 $y = \pm x$ 로 정해진다.

- $|y| < |x|$ (좌우 썩기 영역): 기울기 > 0 , 해곡선이 올라간다.
- $|y| > |x|$ (위아래 썩기 영역): 기울기 < 0 , 해곡선이 내려간다.
- $y = \pm x$ 위에서는 기울기가 0이므로, 해곡선이 이 직선을 지날 때 극대·극소가 생긴다 (등경사선, isocline).

- (a) $(-2, 1)$ 에서 기울기 3으로 올라가다가 $y = -x$ 를 지나면서 극대가 되고, 이후 내려가다 $y = x$ 에서 극소가 된 뒤 다시 올라간다.
- (b) $(-1, -1)$ 은 $y = x$ 위의 점이므로 기울기가 0이다. 그런데 $y'' = 2x - 2yy'$ 에서 $y''(-1) = -2 < 0$ 이므로 이 점은 극대이다. 왼쪽에서는 아래로부터 올라와 이 점에 닿고, 오른쪽으로 가면 아래쪽 썩기 영역($y < -|x|$)에 들어가 기울기가 점점 더 음수가 되므로 빠르게 $-\infty$ 로 내려간다.
- (c) $(0, 2)$ 에서 기울기 -4 로 빠르게 내려가고, $y = x$ 에 닿아 극소가 된 뒤 올라간다. 왼쪽($x < 0$)으로 가면 y 가 급격히 커진다.
- (d) $(0, 0)$ 에서 기울기 0이고 $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2 > 0$ 이므로 원점은 변곡점이다. 해곡선은 $y \approx x^3/3$ 처럼 원점을 지나며 계속 증가한다.

그림 1은 수치적으로 그린 해곡선이다.

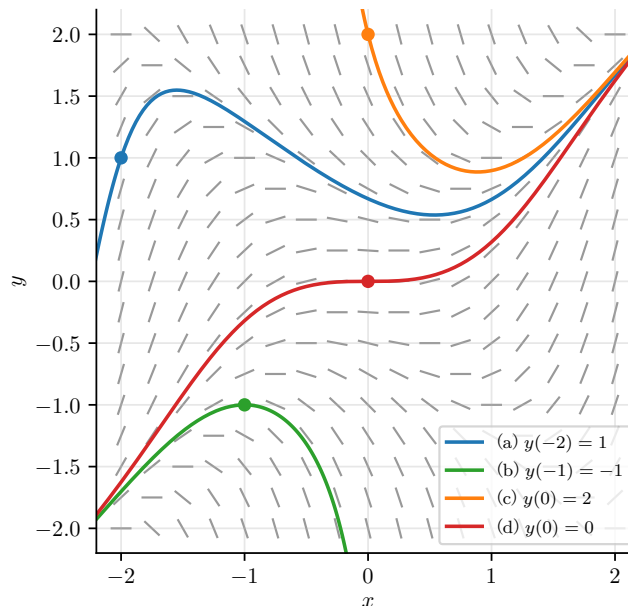


그림 1: $y' = x^2 - y^2$ 의 방향장(회색)과 네 점을 지나는 해곡선.

2 자율 미분방정식: $y' = y^2 - y^4$

문제. $y(0) = y_0$ 일 때 (a) $y_0 < -1$, (b) $-1 < y_0 < 0$, (c) $0 < y_0 < 1$, (d) $1 < y_0$ 인 경우의 전형적인 해의 그래프를 그린다.

임계점과 부호. $f(y) = y^2 - y^4 = y^2(1 - y)(1 + y)$ 이므로 임계점은 $y = -1, 0, 1$ 이다.

구간	$y < -1$	$-1 < y < 0$	$0 < y < 1$	$y > 1$
$f(y)$ 의 부호	-	+	+	-
해의 움직임	감소	증가	증가	감소

따라서 $y = 1$ 은 안정(점근적으로 안정, 끌개), $y = -1$ 은 불안정(밀개), $y = 0$ 은 한쪽에서는 다가오고 다른 쪽에서는 멀어지는 반안정(semi-stable) 임계점이다.

오목·볼록. $y'' = f'(y)y' = f'(y)f(y)$ 이고 $f'(y) = 2y - 4y^3 = 2y(1 - 2y^2)$ 이므로, 해곡선은 $y = \pm 1/\sqrt{2}$ 를 지날 때 변곡점을 갖는다.

- (a) $y_0 < -1$: 해는 감소한다. $x \rightarrow -\infty$ 이면 $y \rightarrow -1$ 로 다가가고, x 가 커지면 $-\infty$ 로 내려간다. ($|y|$ 가 크면 $y' \approx -y^4$ 이므로 유한한 x 에서 발산한다.)
- (b) $-1 < y_0 < 0$: 해는 증가하며 $x \rightarrow -\infty$ 에서 -1 , $x \rightarrow \infty$ 에서 0 으로 간다. $y = -1/\sqrt{2}$ 에서 변곡점을 갖는 S자 곡선이다.
- (c) $0 < y_0 < 1$: 해는 증가하며 $x \rightarrow -\infty$ 에서 0 , $x \rightarrow \infty$ 에서 1 로 간다. $y = 1/\sqrt{2}$ 에서 변곡점이 있다.
- (d) $1 < y_0$: 해는 감소하며 $x \rightarrow \infty$ 일 때 1 로 다간다. x 를 거꾸로 가면 유한한 x 에서 $+\infty$ 로 발산한다.

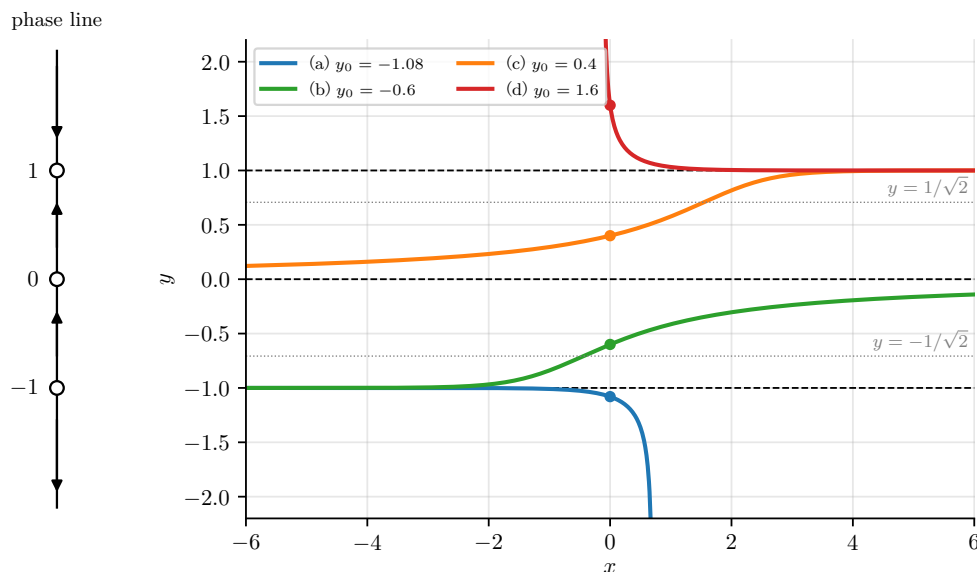


그림 2: $y' = y^2 - y^4$ 의 상선(왼쪽)과 네 경우의 전형적인 해(오른쪽). 점선은 평행해 $y = -1, 0, 1$ 이다.

비고. 해는 서로 다른 평행해를 가로지를 수 없다(유일성 정리). 그래서 각 해는 처음 놓인 R_i 안에 머물고, 그 때의 경계인 평행해로 다가가거나 무한대로 간다.