

변수분리형 방정식

변수를 분리해 양변을 적분하고, 나눗셈에서 잃은 해를 확인하기

공학수학 I · 강의노트 §2.2 Example 풀이

1 변수분리법으로 풀기

- (1) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$. 우변이 x 만의 함수이므로 바로 적분한다.

$$dy = \sin 5x \, dx \Rightarrow y = -\frac{1}{5} \cos 5x + c.$$

- (2) $dx + e^{3x} dy = 0$. 양변을 e^{3x} 로 나누면 $dy = -e^{-3x} dx$ 이므로

$$y = \frac{1}{3} e^{-3x} + c.$$

- (3) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$. $|y| < 1$ 에서 $\sqrt{1-y^2}$ 로 나누면

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x \, dx \Rightarrow \arcsin y = \frac{1}{2} x^2 + c \Rightarrow y = \sin\left(\frac{1}{2} x^2 + c\right).$$

나눌 때 $\sqrt{1-y^2} = 0$ 인 경우를 뺐으므로, 상수해 $y = 1$, $y = -1$ 도 따로 확인해야 한다. 둘 다 양변이 0이 되어 해이다.

답

$y = \sin(\frac{1}{2}x^2 + c)$ (단, $\arcsin y = \frac{1}{2}x^2 + c$ 가 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에 있는 구간에서), 그리고 특이해 $y = \pm 1$

비고. $y = \sin(\frac{1}{2}x^2 + c)$ 는 $\frac{1}{2}x^2 + c$ 가 $\frac{\pi}{2}$ 를 넘어가면 $\cos(\frac{1}{2}x^2 + c) < 0$ 이 되어 $y' = x \cos(\cdot)$ 의 부호가 $x\sqrt{1-y^2}$ 와 달라진다. 그래서 실제 해는 y 가 ± 1 에 닿을 때까지의 부분이고, 그 뒤로는 상수해 $y = \pm 1$ 로 이어 붙인다.

2 초기값 문제: 음함수해와 양함수해

- (1) $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy$, $y(-1) = -1$. $y - xy = y(1-x)$ 이므로

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x^2} dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow \ln |y| = -\frac{1}{x} - \ln |x| + c.$$

$x = -1$, $y = -1$ 을 넣으면 $0 = 1 - 0 + c$, 즉 $c = -1$.

답

음함수해: $\ln |y| = -1 - \frac{1}{x} - \ln |x|$. 양함수해: $y = \frac{1}{x} e^{-1-1/x}$, $x < 0$

$x = -1$ 근처에서 $x < 0$, $y < 0$ 이므로 $|y| = -y$, $|x| = -x$ 로 부호를 정했다. 확인: $y(-1) = -e^0 = -1$. 원래 식은 $x = 0$ 에서 정의되지 않으므로 해의 구간은 $(-\infty, 0)$ 이다.

- (2) $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1)$, $x(\pi/4) = 1$.

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = 4 \, dt \Rightarrow \arctan x = 4t + c.$$

$t = \pi/4, x = 1: \frac{\pi}{4} = \pi + c, \text{ 즉 } c = -\frac{3\pi}{4}.$

답

음함수해: $\arctan x = 4t - \frac{3\pi}{4}.$ 양함수해: $x = \tan\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right), \quad \frac{\pi}{16} < t < \frac{5\pi}{16}$

$\arctan x$ 의 값은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에 있어야 하므로 $-\frac{\pi}{2} < 4t - \frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ 에서 구간이 정해진다. ($\tan$ 의 주기가 π 이므로 $x = \tan(4t + \frac{\pi}{4})$ 로 써도 같은 함수이다. 노트의 `sympy` 결과가 이 풀이다.)