1계 선형 방정식

표준형 $y' + P(x)y = f(x)$와 적분인자 $e^{\int P\,dx}$

공학수학 I · 강의노트 §2.3 Example 풀이

모든 풀이의 순서는 같다. (i) 표준형으로 고친다. (ii) 적분인자 $I(x) = e^{\int P(x)dx}$를 곱해 좌변을 $\frac{d}{dx}[Iy]$로 만든다. (iii) 양변을 적분한다. 해가 정의되는 구간은 표준형의 P와 f가 연속인 구간이다.

1 일반해

(1) $y' + 2y = 0$. $I = e^{2x}$이고 $(e^{2x}y)' = 0$이므로

답
$y = ce^{-2x}, \quad -\infty < x < \infty$

(2) $y' + 2xy = x^3$. $I = e^{x^2}$이므로 $(e^{x^2}y)' = x^3e^{x^2}$. $u = x^2$로 치환하면 $\int x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int ue^u\,du = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}$.

답
$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + ce^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

(3) $xy' + 2y = 3$. 표준형 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x}$, $I = e^{2\ln|x|} = x^2$이므로 $(x^2y)' = 3x$, $x^2y = \frac{3}{2}x^2 + c$.

답
$$y = \frac{3}{2} + \frac{c}{x^2}, \quad 0 < x < \infty \ \text{(또는 } -\infty < x < 0\text{)}$$

(4) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$. 표준형 $y' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y = \frac{e^{-x}\sin 2x}{x}$, $I = e^{\ln x + x} = xe^x$ $(x > 0)$.

$$(xe^xy)' = \sin 2x \ \Rightarrow\ xe^xy = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + c.$$

답
$$y = \frac{e^{-x}}{x}\left(c - \tfrac{1}{2}\cos 2x\right), \quad 0 < x < \infty$$

2 초기값 문제와 해의 최대 구간

(1) $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2$, $y(1) = 5$. y를 독립변수, x를 종속변수로 보면 x에 대해 선형이다. 표준형 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 2y$, $I = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{x}{y}\right] = 2 \ \Rightarrow\ \frac{x}{y} = 2y + c \ \Rightarrow\ x = 2y^2 + cy.$$

$y(1) = 5$는 $x = 1$일 때 $y = 5$라는 뜻이므로 $1 = 50 + 5c$, $c = -\frac{49}{5}$.

답
$$x = 2y^2 - \frac{49}{5}y, \quad 0 < y < \infty$$

표준형의 계수 $-1/y$가 $y = 0$에서 불연속이고 초기점이 $y = 5 > 0$이므로 구간은 $y > 0$이다.

(2) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x,\ y(1) = 10$. 좌변이 이미 $\frac{d}{dx}[(x+1)y]$이다.

$$(x+1)y = \int \ln x\, dx = x\ln x - x + c.$$

$x = 1$: $2 \cdot 10 = -1 + c$, $c = 21$.

> **답**
> $y = \dfrac{x\ln x - x + 21}{x+1}, \quad 0 < x < \infty$

$\ln x$ 때문에 $x > 0$이어야 하고, $x = -1$은 그 바깥이므로 구간은 $(0, \infty)$이다.

3 y에 대해서는 비선형이지만 x에 대해서는 선형인 방정식

x를 y의 함수로 보면 $\dfrac{dx}{dy} + P(y)x = f(y)$ 꼴의 선형 방정식이 된다.

(1) $dx = (x + y^2)dy$: $\dfrac{dx}{dy} - x = y^2$, $I = e^{-y}$.

$$(e^{-y}x)' = y^2 e^{-y} \ \Rightarrow\ e^{-y}x = -(y^2 + 2y + 2)e^{-y} + c.$$

> **답**
> $x = -y^2 - 2y - 2 + ce^y$

(2) $y\,dx + (2x + xy - 3)dy = 0$: $\dfrac{dx}{dy} + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right)x = \dfrac{3}{y}$, $I = e^{y + 2\ln y} = y^2 e^y$.

$$(y^2 e^y x)' = 3ye^y \ \Rightarrow\ y^2 e^y x = 3(y-1)e^y + c.$$

> **답**
> $x = \dfrac{3}{y} - \dfrac{3}{y^2} + \dfrac{c}{y^2}e^{-y}$

(노트 Worked Exercise 8에 완전미분방정식으로 푸는 방법도 있다.)

4 사인 적분 함수로 나타내기

$x^3y' + 2x^2y = 10\sin x$, $y(1) = 0$. 양변을 x로 나누면 좌변이 곧 $\frac{d}{dx}[x^2y]$이다:

$$\frac{d}{dx}[x^2y] = \frac{10\sin x}{x}.$$

1부터 x까지 적분하면 ($y(1) = 0$이므로 좌변의 아래끝 값은 0)

$$x^2y = 10\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = 10\left[\mathrm{Si}(x) - \mathrm{Si}(1)\right].$$

> **답**
> $y = \dfrac{10}{x^2}\left[\mathrm{Si}(x) - \mathrm{Si}(1)\right], \quad 0 < x < \infty$

비고. $\sin t/t$는 초등함수인 역도함수가 없으므로, 이런 적분은 정적분으로 정의된 함수 Si로 답을 쓴다. $\mathrm{Si}(1) \approx 0.9461$.