

완전미분방정식

$M_y = N_x$ 확인, 퍼텐셜 함수 $f(x, y) = c$ 구하기, 적분인자

공학수학 I · 강의노트 §2.4 Example 풀이

풀이 순서. $M dx + N dy = 0$ 에서 (i) $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ 인지 확인한다. (ii) $f = \int M dx + g(y)$ 로 놓는다. (iii) $\partial f/\partial y = N$ 에서 $g'(y)$ 를 구한다. (iv) 해는 $f(x, y) = c$ 이다.

1 예제: $2xy dx + (x^2 - 1) dy = 0$

$M_y = 2x = N_x$ 이므로 완전하다. $f = \int 2xy dx = x^2 y + g(y)$ 이고 $f_y = x^2 + g'(y) = x^2 - 1$ 에서 $g(y) = -y$.

답

$$x^2 y - y = c, \quad \Leftrightarrow y = \frac{c}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)$$

2 완전한지 판정하고, 완전하면 풀기

(1) $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$: $M_y = 0 = N_x$, 완전. $f = x^2 - x + g(y)$, $g'(y) = 3y + 7$.

답

$$x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$$

(2) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^2)dy = 0$: $M_y = 4 = N_x$, 완전. $f = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y)$, $f_y = 4x + g' = 4x - 8y^2$ 에서 $g = -\frac{8}{3}y^3$.

답

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy - \frac{8}{3}y^3 = c$$

(3) $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2 y + 4)dy = 0$: $M_y = 4xy = N_x$, 완전. $f = x^2 y^2 - 3x + g(y)$, $f_y = 2x^2 y + g' = 2x^2 y + 4$ 에서 $g = 4y$.

답

$$x^2 y^2 - 3x + 4y = c$$

(4) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$: $M_y = -2y$, $N_x = 2x - 2y$. $M_y \neq N_x$ 이므로 완전하지 않다.

비고. (4)는 M, N 이 모두 2차 동차함수이므로 §2.5의 치환 $y = ux$ 로 풀 수 있다.

3 초기값 문제

(1) $(x + y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$, $y(1) = 1$. $M_y = 2(x + y) = N_x$, 완전. $f = \int (x + y)^2 dx = \frac{1}{3}(x + y)^3 + g(y)$ 이고

$$f_y = (x + y)^2 + g'(y) = 2xy + x^2 - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 - y^2, \quad g = -y - \frac{1}{3}y^3.$$

따라서 $f = \frac{1}{3}x^3 + x^2 y + xy^2 - y$. $(1, 1)$ 에서 $f = \frac{1}{3} + 1 + 1 - 1 = \frac{4}{3}$.

답

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3} \quad (\text{즉 } x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y = 4)$$

(2) $(4y + 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0$, $y(-1) = 2$. $M_y = 4 = N_t$, 완전. $f = 4ty + t^2 - 5t + g(y)$, $f_y = 4t + g' = 6y + 4t - 1$ 에서 $g = 3y^2 - y$. $t = -1$, $y = 2$: $f = -8 + 1 + 5 + 12 - 2 = 8$.

답

$$4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$$

y 에 대한 2차식이므로 양함수로도 쓸 수 있다: $3y^2 + (4t - 1)y + (t^2 - 5t - 8) = 0$ 에서 $y(-1) = 2$ 가 되는 근을 고르면 $y = \frac{1 - 4t + \sqrt{4t^2 + 52t + 97}}{6}$ (확인: $t = -1$ 이면 $\frac{5+7}{6} = 2$).

4 적분인자 찾기: $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$

$M = xy + y^2 + y$, $N = x + 2y$ 이므로 $M_y = x + 2y + 1$, $N_x = 1$ 로 완전하지 않다. 그런데

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + 2y}{x + 2y} = 1$$

이 x 만의 함수(상수)이므로 적분인자 $\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$ 가 있다. e^x 를 곱한 식 $e^x(xy + y^2 + y)dx + e^x(x + 2y)dy = 0$ 은 완전하다.

$$f = \int e^x(x + 2y) dy = e^x(xy + y^2) + h(x), \quad f_x = e^x(xy + y^2) + e^xy + h'(x) = e^x(xy + y^2 + y) \Rightarrow h' = 0.$$

답

$$e^x(xy + y^2) = c$$

비고. $(M_y - N_x)/N$ 이 x 만의 함수이면 $\mu = e^{\int (M_y - N_x)/N dx}$, $(N_x - M_y)/M$ 이 y 만의 함수이면 $\mu = e^{\int (N_x - M_y)/M dy}$ 가 적분인자이다.