

치환에 의한 풀이

$u = Ax + By + C$, 동차형 $y = ux$, 베르누이형 $u = y^{1-n}$

공학수학 I · 강의노트 §2.5 Example 풀이

1 $u = -2x + y$ 로 치환: $y' = (-2x + y)^2 - 7$, $y(0) = 0$

본문에서 $u' = u^2 - 9$, $u(0) = 0$ 을 얻었다. 이것은 §2.2의 첫 예제와 같은 초기값 문제이므로

$$u = 3 \frac{1 - e^{6x}}{1 + e^{6x}} = -3 \tanh 3x.$$

답

$$y = 2x + 3 \frac{1 - e^{6x}}{1 + e^{6x}} = 2x - 3 \tanh 3x$$

확인: $y' = 2 - 9 \operatorname{sech}^2 3x = 2 - 9 + 9 \tanh^2 3x = (y - 2x)^2 - 7$.

2 동차형: $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

M, N 모두 2차 동차함수이다. $y = ux$, $dy = u dx + x du$ 를 넣고 x^2 으로 나누면

$$(1 + u^2)dx + (1 - u)(u dx + x du) = 0 \Rightarrow (1 + u) dx + x(1 - u) du = 0.$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - u}{1 + u} du = 0, \quad \frac{1 - u}{1 + u} = -1 + \frac{2}{1 + u}$$

$$\ln |x| - u + 2 \ln |1 + u| = c.$$

$u = y/x$ 를 되돌리면 $\ln |x| - \frac{y}{x} + 2 \ln |x + y| - 2 \ln |x| = c$, 즉 $\ln \frac{(x + y)^2}{|x|} = \frac{y}{x} + c$.

답

$$(x + y)^2 = Cx e^{y/x}$$

($1 + u$ 로 나눌 때 빠진 $u = -1$, 즉 $y = -x$ 도 원래 식을 만족한다: $2x^2 dx + 2x^2(-dx) = 0$. 이것은 위 식에서 $C = 0$ 인 경우이다.)

3 베르누이형: $y' - \frac{2}{x}y = -x^2 y^2$

본문에서 $u = 1/y$ 로 $u' + \frac{2}{x}u = x^2$ 을 얻었다. 적분인자 x^2 :

$$(x^2 u)' = x^4 \Rightarrow x^2 u = \frac{1}{5} x^5 + c \Rightarrow u = \frac{x^5 + 5c}{5x^2}.$$

답

$$y = \frac{5x^2}{x^5 + C} \quad (\text{그리고 } u = 1/y \text{로 바꿀 때 빠진 } y = 0)$$

4 적절한 치환으로 풀기 (동차형)

(1) $(x - y)dx + x dy = 0$. $y = ux$: $(1 - u)dx + (u dx + x du) = 0$, 즉 $dx + x du = 0$. $u = -\ln|x| + c$.

답

$$y = x(c - \ln|x|)$$

(이 식은 $y' - \frac{1}{x}y = -1$ 인 선형 방정식이기도 하다.)

(2) $x dx + (y - 2x)dy = 0$. $y = ux$: $dx + (u - 2)(u dx + x du) = 0$, 즉 $(u - 1)^2 dx + x(u - 2)du = 0$.

$$\frac{dx}{x} + \frac{u - 2}{(u - 1)^2} du = 0, \quad \frac{u - 2}{(u - 1)^2} = \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{(u - 1)^2}$$

$$\ln|x| + \ln|u - 1| + \frac{1}{u - 1} = c \Rightarrow \ln|y - x| + \frac{x}{y - x} = c.$$

답

$$\ln|y - x| + \frac{x}{y - x} = c, \text{ 그리고 } y = x$$

(($u - 1$)² 으로 나눌 때 빠진 $u = 1$, 즉 $y = x$ 도 해이다.)

(3) $y' = \frac{y - x}{y + x}$. $y = ux$: $u + xu' = \frac{u - 1}{u + 1}$, 즉 $xu' = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}$.

$$\frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan u = -\ln|x| + c.$$

답

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} = c$$

(4) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $x > 0$. 양변을 x 로 나누면 $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - (y/x)^2}$ ($x > 0$ 이므로 $\sqrt{x^2} = x$).
 $y = ux$:

$$u + xu' = u + \sqrt{1 - u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin u = \ln x + c.$$

답

$$y = x \sin(\ln x + c), \text{ 그리고 특이해 } y = \pm x$$

5 초기값 문제 (동차형)

(1) $xy^2y' = y^3 - x^3$, $y(1) = 2$. $y = ux$: $x^3u^2(u + xu') = x^3(u^3 - 1)$, 즉 $xu^2u' = -1$.

$$u^2 du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} u^3 = -\ln|x| + c \Rightarrow y^3 = -3x^3 \ln|x| + Cx^3.$$

$y(1) = 2$: $C = 8$.

답

$$y^3 = x^3(8 - 3 \ln x), \text{ 즉 } y = x(8 - 3 \ln x)^{1/3}$$

$$(2) \quad (x^2 + 2y^2) \frac{dx}{dy} = xy, \quad y(-1) = 1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y^2}{xy} \text{ 이고 } y = ux:$$

$$u + xu' = \frac{1}{u} + 2u \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2}{u} \Rightarrow \frac{u du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 1+u^2 = Cx^2.$$

즉 $x^2 + y^2 = Cx^4$. $(-1, 1)$ 에서 $C = 2$.

답

$$x^2 + y^2 = 2x^4, \text{ 양함수로는 } y = -x\sqrt{2x^2 - 1}, \quad x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

($x < 0, y > 0$ 이므로 $\sqrt{x^2} = -x$ 인 근을 고른다. $2x^2 - 1 > 0$ 이어야 하므로 구간은 $x < -1/\sqrt{2}$.)

6 적절한 치환으로 풀기 (베르누이형, $u = Ax + By + C$ 형)

$$(1) \quad xy' + y = \frac{1}{y^2}: y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{-2}, \text{ 베르누이형 } (n = -2). \quad u = y^3 \text{ 이면 } u' = 3y^2y' \text{ 이므로}$$

$$u' + \frac{3}{x}u = \frac{3}{x} \Rightarrow (x^3u)' = 3x^2 \Rightarrow x^3u = x^3 + c.$$

답

$$y^3 = 1 + \frac{c}{x^3}$$

$$(2) \quad 3(1+t^2) \frac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1): y' + \frac{2t}{3(1+t^2)}y = \frac{2t}{3(1+t^2)}y^4, \text{ 베르누이형 } (n = 4). \quad u = y^{-3} \text{ 이면}$$

$$u' = -3y^{-4}y' \text{ 이므로}$$

$$u' - \frac{2t}{1+t^2}u = -\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\text{적분인자 } \frac{1}{1+t^2}: \left(\frac{u}{1+t^2} \right)' = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \text{ 따라서 } \frac{u}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + c.$$

답

$$y^{-3} = 1 + c(1+t^2) \quad (\text{그리고 } y = 0)$$

$$(3) \quad y' = \cos(x+y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}. \quad u = x+y: u' = 1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}.$$

$$\frac{du}{2 \cos^2(u/2)} = dx \Rightarrow \tan \frac{u}{2} = x + c.$$

$$u(0) = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } c = \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

답

$$y = 2 \arctan(x + \sqrt{2} - 1) - x$$