

오일러 방법

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$ 로 $y(1.2)$ 근삿값 구하기

공학수학 I · 강의노트 §2.6 Example 풀이

문제. $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$ 일 때 $y(1.2)$ 를 $h = 0.1$ 과 $h = 0.05$ 로 소수 넷째 자리까지 구한다.

$f(x, y) = 2x - 3y + 1$ 이므로 오일러 공식은

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n - 3y_n + 1).$$

1 $h = 0.1$ (두 번)

$$y_1 = 5 + 0.1(2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + 1) = 5 + 0.1(-12) = 3.8000 \quad (x_1 = 1.1)$$

$$y_2 = 3.8 + 0.1(2 \cdot 1.1 - 3 \cdot 3.8 + 1) = 3.8 + 0.1(-8.2) = 2.9800 \quad (x_2 = 1.2)$$

답

$$y(1.2) \approx 2.9800$$

2 $h = 0.05$ (네 번)

$$y_1 = 5 + 0.05(2 - 15 + 1) = 4.4000 \quad (x = 1.05)$$

$$y_2 = 4.4 + 0.05(2.1 - 13.2 + 1) = 3.8950 \quad (x = 1.10)$$

$$y_3 = 3.895 + 0.05(2.2 - 11.685 + 1) = 3.4708 \quad (x = 1.15)$$

$$y_4 = 3.47075 + 0.05(2.3 - 10.41225 + 1) = 3.1151 \quad (x = 1.20)$$

답

$$y(1.2) \approx 3.1151$$

3 정확한 해와 비교

이 방정식은 선형이므로 정확히 풀 수 있다. $y_p = ax + b$ 를 넣으면 $a = 2x - 3ax - 3b + 1$ 에서 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{9}$ 이고

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}, \quad y(1.2) = \frac{2.4}{3} + \frac{1}{9} + \frac{38}{9}e^{-0.6} \approx 3.2283.$$

h	오일러 값	오차	상대오차
0.1	2.9800	0.2483	7.7%
0.05	3.1151	0.1132	3.5%

비고. h 를 절반으로 줄이면 오차도 대략 절반이 된다($0.2483 \rightarrow 0.1132$). 오일러 방법의 전역 오차가 h 에 비례하는(1차 방법) 것과 맞는다.

```
def euler(f, x0, y0, h, xf):
    x, y = x0, y0
    while x < xf - 1e-12:
        y += h * f(x, y); x += h
    return y
f = lambda x, y: 2*x - 3*y + 1
print(euler(f, 1, 5, 0.1, 1.2), euler(f, 1, 5, 0.05, 1.2))
```