

선형 모델: 인구 증가

$$dP/dt = kP \text{와 배가 시간}$$

공학수학 I · 강의노트 §2.7 Example 풀이

문제. 인구가 현재 인구에 비례하는 속도로 증가한다. 처음 인구 P_0 가 5년 만에 두 배가 되었다면, 세 배가 되는 데에는 얼마나 걸리는가? 네 배는?

1 풀이

$\frac{dP}{dt} = kP$, $P(0) = P_0$ 의 해는 $P(t) = P_0 e^{kt}$ 이다. $P(5) = 2P_0$ 에서 $e^{5k} = 2$, 즉

$$k = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.1386 / \text{년}.$$

$P(t) = nP_0$ 가 되는 시간은 $e^{kt} = n$ 에서

$$t = \frac{\ln n}{k} = 5 \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

답

세 배: $t = 5 \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 7.92$ 년. 네 배: $t = 5 \frac{\ln 4}{\ln 2} = 10$ 년.

비고. 지수 증가에서는 두 배가 되는 시간이 처음 크기와 상관없이 일정하다. 네 배는 “두 배의 두 배”이므로 배가 시간의 두 배인 10년이다. 답에 P_0 가 나타나지 않는 것도 같은 이유이다.