

로트카-볼테라 포식자-피식자 모델

수치해의 그래프에서 주기 읽기

공학수학 I · 강의노트 §2.9 Example 풀이

문제. $\frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy$, $\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy$, $x(0) = y(0) = 6$ (단위: 천 마리, x 는 포식자, y 는 피식자). 수치해의 그래프에서 각 개체군의 주기를 어렵한다.

1 그래프 읽기

노트의 `solve_ivp` 코드로 그린 그래프(그림 1)에서 이웃한 두 봉우리 사이의 시간을 재면 된다. 포식자 x 의 봉우리는 $t \approx 17.0, 62.0, 106.9, \dots$, 피식자 y 의 봉우리는 $t \approx 7.5, 52.4, 97.4, \dots$ 에서 나타난다.

답

두 개체군의 주기는 같으며 $T \approx 45$ (시간 단위)이다.

포식자는 8에서 크게 벗어나지 않는 범위($5.8 \leq x \leq 10.7$), 피식자는 $3.1 \leq y \leq 7.5$ 에서 진동한다. 피식자의 봉우리가 포식자보다 약 9.5만큼(주기의 약 1/5) 먼저 온다. 먹이가 늘어난 뒤에야 포식자가 늘어나기 때문이다.

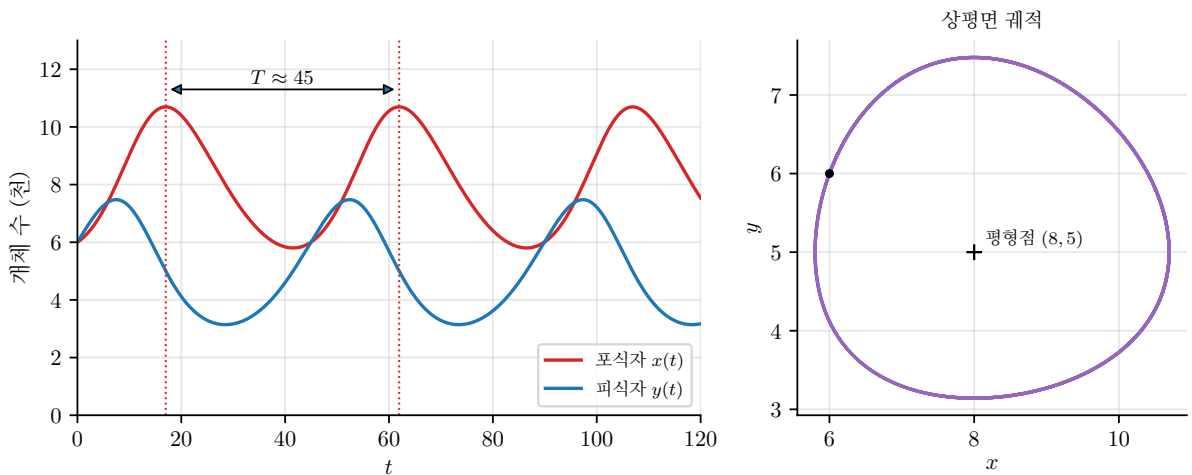


그림 1: 왼쪽: $x(t), y(t)$ 와 포식자 봉우리 사이의 간격. 오른쪽: xy -평면의 궤적은 닫힌 곡선이므로 해는 주기함수이다.

2 선형화로 확인하기

평형점은 $x' = y' = 0$ 에서 $y = 0.1/0.02 = 5$, $x = 0.2/0.025 = 8$ 이다. 평형점 근처에서 선형화하면 진동의 각진동수는 $\omega = \sqrt{0.1 \times 0.2} = \sqrt{0.02}$ 이므로

$$T_{\text{lin}} = \frac{2\pi}{\sqrt{0.02}} \approx 44.4.$$

초기값 (6, 6)이 평형점 (8, 5)에서 조금 떨어져 있어서 실제 주기(≈ 45.0)는 이보다 약간 길다.

비고. 궤적이 닫힌 곡선이 되는 이유: 두 식을 나누면 $\frac{dy}{dx} = \frac{y(0.2 - 0.025x)}{x(-0.1 + 0.02y)}$ 로 변수분리형이 되고, 적분하면 보존량 $0.2 \ln x - 0.025x + 0.1 \ln y - 0.02y = \text{const}$ 를 얻는다. 해는 이 값이 일정한 등고선 위를 계속 돈다.