

선형 방정식의 이론

초기조건, 일차독립과 론스키안, 기본해집합, 비제차 방정식의 일반해

공학수학 I · 강의노트 §3.1 Example 풀이

1 초기조건을 만족하는 해

$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ 에서 $x'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$ 이다.

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad x'(0) = c_2 \omega = x_1 \Rightarrow c_2 = \frac{x_1}{\omega}.$$

결과

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$$

2 일차종속인가, 일차독립인가

(1) $f_1 = x, f_2 = x^2, f_3 = 4x - 3x^2$. $f_3 = 4f_1 - 3f_2$, 즉 $4f_1 - 3f_2 - f_3 = 0$ 이 모든 x 에서 성립하고 계수가 모두 0은 아니므로 일차종속이다.

(2) $f_1 = 5, f_2 = \cos^2 x, f_3 = \sin^2 x$. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 이므로 $f_1 - 5f_2 - 5f_3 = 0$. 일차종속이다.

비고. 함수가 세 개 이상일 때는 “한 함수가 다른 함수의 상수배”이지만 보아서는 안 된다. (1)에서는 어느 두 함수도 서로의 상수배가 아니지만 세 함수는 일차종속이다.

3 기본해집합과 일반해

각 함수가 해인지 대입해 확인하고, 론스키안이 0이 아님을 보이면 된다.

(1) $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x}, e^{4x} . 특성방정식 $p^2 - p - 12 = (p+3)(p-4) = 0$ 의 근이 $-3, 4$ 이므로 둘 다 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 7e^x \neq 0.$$

일반해

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

(2) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$. 특성근이 $1 \pm 2i$ 이므로 둘 다 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x) & e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0.$$

일반해

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

4 비제차 방정식의 일반해 확인

일반해가 $y_h + y_p$ 꼴이므로, (i) y_h 가 제차방정식의 기본해집합으로 이루어졌는지, (ii) y_p 가 비제차방정식을 만족하는지 확인한다.

(1) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$. $p^2 - 7p + 10 = (p-2)(p-5)$ 이므로 e^{2x}, e^{5x} 가 기본해집합이다 ($W = 3e^{7x} \neq 0$).
 $y_p = 6e^x$: $6e^x - 42e^x + 60e^x = 24e^x$. ✓

(2) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$. $(p-2)^2 = 0$ 이므로 e^{2x}, xe^{2x} 가 기본해집합이다 ($W = e^{4x} \neq 0$).
 $y_p = x^2e^{2x} + x - 2$ 를 둘로 나누어 대입하면

$$L[x^2e^{2x}] = (2 + 8x + 4x^2)e^{2x} - 4(2x + 2x^2)e^{2x} + 4x^2e^{2x} = 2e^{2x}, \quad L[x - 2] = 0 - 4 + 4(x - 2) = 4x - 12.$$

합이 우변과 같다. ✓