

계수 낮추기

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

공학수학 I · 강의노트 §3.2 Example 풀이

1 두 번째 해 구하기

(1) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$. $P = -4$ 이므로 $e^{-\int P dx} = e^{4x}$.

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{4x}}{e^{4x}} dx = e^{2x} \cdot x.$$

답

$$y_2 = xe^{2x}$$

(2) $y'' + 16y = 0$, $y_1 = \cos 4x$. $P = 0$ 이므로

$$y_2 = \cos 4x \int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \cos 4x \cdot \frac{\tan 4x}{4} = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

답

$$y_2 = \sin 4x \quad (\text{상수배는 버려도 된다})$$

(3) $y'' - y = 0$, $y_1 = \cosh x$.

$$y_2 = \cosh x \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \cosh x \tanh x = \sinh x.$$

답

$$y_2 = \sinh x$$

2 비제차 방정식: $y'' - 4y = 2$, $y_1 = e^{-2x}$

$y = u(x)e^{-2x}$ 를 비제차방정식에 직접 넣는다. $y' = (u' - 2u)e^{-2x}$, $y'' = (u'' - 4u' + 4u)e^{-2x}$ 이므로

$$(u'' - 4u')e^{-2x} = 2 \Rightarrow w' - 4w = 2e^{2x} \quad (w = u').$$

적분인자 e^{-4x} 를 곱하면 $(we^{-4x})' = 2e^{-2x}$, 따라서 $w = -e^{2x} + c_1e^{4x}$ 이고

$$u = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{c_1}{4}e^{4x} + c_2, \quad y = ue^{-2x} = -\frac{1}{2} + \frac{c_1}{4}e^{2x} + c_2e^{-2x}.$$

답

$$y_2 = e^{2x}, \quad y_p = -\frac{1}{2}, \quad \text{일반해 } y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

비고. 계수 낮추기를 비제차방정식에 적용하면 u' 에 대한 1계 선형 비제차방정식이 나오고, 그 해에서 y_2 와 y_p 가 한꺼번에 나온다.