상수계수 제차 선형 방정식

특성방정식의 근으로 일반해 쓰기

공학수학 I · 강의노트 §3.3 Example 풀이

1 $y'' + \omega^2 y = 0$과 $y'' - \omega^2 y = 0$ $(\omega > 0)$

- $y'' + \omega^2 y = 0$: $p^2 + \omega^2 = 0$, $p = \pm i\omega$ (Case III, $\alpha = 0$, $\beta = \omega$).
- $y'' - \omega^2 y = 0$: $p^2 - \omega^2 = 0$, $p = \pm\omega$ (Case I).

답
$y'' + \omega^2 y = 0$: $y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$
$y'' - \omega^2 y = 0$: $y = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x} = C_1 \cosh\omega x + C_2 \sinh\omega x$

2 $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$

특성방정식 $3p^3 + 5p^2 + 10p - 4 = 0$. 유리근 후보 중 $p = \frac{1}{3}$이 근이다($\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{10}{3} - 4 = 0$). 인수분해하면

$$(3p-1)(p^2 + 2p + 4) = 0 \;\Rightarrow\; p = \tfrac{1}{3}, \quad p = -1 \pm \sqrt{3}\,i.$$

답
$y = c_1 e^{x/3} + e^{-x}\left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x\right)$

3 2계 방정식의 일반해

(1) $4y'' + y' = 0$: $4p^2 + p = p(4p+1) = 0$, $p = 0, -\frac{1}{4}$. $\quad y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$

(2) $y'' - y' - 6y = 0$: $(p-3)(p+2) = 0$. $\quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

(3) $y'' + 8y' + 16y = 0$: $(p+4)^2 = 0$ (중근). $\quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-4x}$

4 고계 방정식의 일반해

(1) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$: $p(p^2 - 4p - 5) = p(p-5)(p+1) = 0$. $\quad y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-x}$

(2) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$: $p = -1$이 근이므로 $(p+1)(p^2 - 6p + 9) = (p+1)(p-3)^2 = 0$.
$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{3x}$

5 초기값 문제: $y''' + 12y'' + 36y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -7$

$p(p+6)^2 = 0$이므로 $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-6x}$.

$$y' = (c_3 - 6c_2 - 6c_3 x)e^{-6x}, \qquad y'' = (-12c_3 + 36c_2 + 36c_3 x)e^{-6x},$$
$$y(0) = c_1 + c_2 = 0, \qquad y'(0) = c_3 - 6c_2 = 1, \qquad y''(0) = 36c_2 - 12c_3 = -7.$$

둘째·셋째 식에서 $c_2 = -\frac{5}{36}$, $c_3 = \frac{1}{6}$, 첫째 식에서 $c_1 = \frac{5}{36}$.

답

$y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$