

## 미정계수법

$g(x)$ 의 모양으로  $y_p$ 를 추측하고,  $y_h$ 와 겹치면  $x^n$ 을 곱한다

공학수학 I · 강의노트 §3.4 Example 풀이

### 1 $y'' + 4y = x \cos x$

$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ .  $g = x \cos x$  (표의 12번 꼴)이므로  $y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + E) \sin x$ 로 둔다 ( $y_h$ 와 겹치지 않음). 대입하면  $y_p'' + 4y_p = (3Ax + 3B + 2C) \cos x + (3Cx + 3E - 2A) \sin x$ 이고  $x \cos x$ 와 비교해

$$3A = 1, \quad 3B + 2C = 0, \quad 3C = 0, \quad 3E - 2A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad E = \frac{2}{9}.$$

답

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x$$

### 2 $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$

$(p-3)^2 = 0$ 이므로  $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ . 다항식 부분은  $Ax^2 + Bx + C$ , 지수 부분은  $Dx^2 e^{3x}$ 인데  $e^{3x}, x e^{3x}$ 와 겹치므로  $x^2$ 을 곱해  $Dx^2 e^{3x}$ 로 둔다.

- 다항식:  $2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 2$ 에서  $A = \frac{2}{3}, B = \frac{8}{9}, C = \frac{2}{3}$ .
- 지수:  $L[x^2 e^{3x}] = 2e^{3x}$ 이므로  $2D = -12, D = -6$ .

답

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2 e^{3x}$$

### 3 $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$

$p^3(p+1) = 0$ 이므로  $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x}$ .

- $g_1 = 1$ :  $A$ 는  $y_h$ 의  $1, x, x^2$ 과 겹치므로  $x^3$ 을 곱해  $Ax^3$ .  $L[Ax^3] = 6A = 1, A = \frac{1}{6}$ .
- $g_2 = -x^2 e^{-x}$ :  $(Bx^2 + Cx + E)e^{-x}$ 의  $Ee^{-x}$ 가  $c_4 e^{-x}$ 와 겹치므로  $x$ 를 곱해  $(Bx^3 + Cx^2 + Ex)e^{-x}$ 로 둔다. 대입해 계수를 비교하면  $B = \frac{1}{3}, C = 3, E = 12$ .

답

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 + \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x\right)e^{-x}$$

## 4 미정계수법으로 풀기

(1)  $y'' + 2y' + y = \sin x + 3 \cos 2x$ .  $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$ .  $y_p = A \cos x + B \sin x + C \cos 2x + E \sin 2x$ .  $\cos x, \sin x$ :  $2B = 0, -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0$ .  $\cos 2x, \sin 2x$ :  $-3C + 4E = 3, -4C - 3E = 0 \Rightarrow C = -\frac{9}{25}, E = \frac{12}{25}$ .

답

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{9}{25} \cos 2x + \frac{12}{25} \sin 2x$$

(2)  $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$ .  $(p+6)(p-4) = 0$ 이므로  $y_h = c_1e^{-6x} + c_2e^{4x}$ . 상수 부분  $A$ :  $-24A = 16$ ,  $A = -\frac{2}{3}$ . 지수 부분은  $e^{4x}$ 와 겹치므로  $(Bx^2 + Cx)e^{4x}$ 로 둔다.  $L[(Bx^2 + Cx)e^{4x}] = (20Bx + 2B + 10C)e^{4x} = -(x+2)e^{4x}$ 에서  $B = -\frac{1}{20}$ ,  $C = -\frac{19}{100}$ .

답

$$y = c_1e^{-6x} + c_2e^{4x} - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{19}{100}x\right)e^{4x}$$

(3)  $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$ .  $p^2(p-6) = 0$ 이므로  $y_h = c_1 + c_2x + c_3e^{6x}$ . 상수 3에 대한  $A$ 는 1,  $x$ 와 겹치므로  $Ax^2$ :  $-12A = 3$ ,  $A = -\frac{1}{4}$ .  $-\cos x$ 에 대해  $B \cos x + C \sin x$ :  $L = (B \sin x - C \cos x) + 6(B \cos x + C \sin x)$ 에서  $6B - C = -1$ ,  $B + 6C = 0 \Rightarrow B = -\frac{6}{37}$ ,  $C = \frac{1}{37}$ .

답

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\sin x$$

## 5 초기값 문제

(1)  $y'' + 4y = -2$ ,  $y(\pi/8) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(\pi/8) = 2$ .  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{2}$ .  $x = \pi/8$ 에서  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로  $\frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 + c_2) = 1$ ,  $\sqrt{2}(c_2 - c_1) = 2 \Rightarrow c_1 = 0$ ,  $c_2 = \sqrt{2}$ .

답

$$y = \sqrt{2} \sin 2x - \frac{1}{2}$$

(2)  $5y'' + y' = -6x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -10$ .  $y_h = c_1 + c_2e^{-x/5}$ . 상수가  $y_h$ 에 있으므로  $y_p = Ax^2 + Bx$ :  $10A + 2Ax + B = -6x \Rightarrow A = -3$ ,  $B = 30$ .  $y = c_1 + c_2e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$ 에서  $c_1 + c_2 = 0$ ,  $-\frac{c_2}{5} + 30 = -10 \Rightarrow c_2 = 200$ ,  $c_1 = -200$ .

답

$$y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$$

(3)  $x'' + \omega^2 x = F_0 \sin \omega t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ . 우변의  $\sin \omega t$ 가  $x_h = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ 와 겹치므로  $x_p = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ . 대입하면  $x_p'' + \omega^2 x_p = 2\omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) = F_0 \sin \omega t \Rightarrow A = -\frac{F_0}{2\omega}$ ,  $B = 0$ .  $x(0) = c_1 = 0$ ,  $x'(0) = c_2\omega + A = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{F_0}{2\omega^2}$ .

답

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

**비고.** 외력의 진동수가 고유진동수  $\omega$ 와 같으면 진폭이  $t$ 에 비례해 끝없이 커진다. 이것이 **공명**(resonance)이다 (§3.8의 극한 예제와 같은 결과).