

매개변수 변환법

표준형 $y'' + Py' + Qy = f$ 에서 $u'_1 = -y_2 f/W$, $u'_2 = y_1 f/W$

공학수학 I · 강의노트 §3.5 Example 풀이

주의. 공식의 f 는 반드시 표준형(최고계수 1)의 우변이다. 두 번째 식부터는 이 점을 자주 쓴다.

$$1 \quad y'' - y = \frac{1}{x}$$

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2.$$

$$u'_1 = -\frac{e^{-x} \cdot \frac{1}{x}}{-2} = \frac{e^{-x}}{2x}, \quad u'_2 = \frac{e^x \cdot \frac{1}{x}}{-2} = -\frac{e^x}{2x}.$$

두 적분 모두 초등함수로 쓸 수 없으므로 정적분으로 남긴다(x_0 는 해의 구간 안의 한 점, 예를 들어 $x > 0$ 이면 $x_0 = 1$).

답

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \int_{x_0}^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_{x_0}^x \frac{e^t}{t} dt = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \int_{x_0}^x \frac{\sinh(x-t)}{t} dt$$

2 매개변수 변환법으로 풀기

(1) $y'' + y = \sec x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $W = 1$. $u'_1 = -\tan x$, $u_1 = \ln |\cos x|$; $u'_2 = 1$, $u_2 = x$.

답

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$$

(2) $y'' + y = \sin x$. $u'_1 = -\sin^2 x = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $u_1 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$; $u'_2 = \sin x \cos x$, $u_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x$.

$$y_p = \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x \sin x = -\frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{4} \sin x.$$

$\frac{1}{4} \sin x$ 는 y_h 에 흡수된다.

답

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

(3) $y'' + y = \cos^2 x$. $u'_1 = -\sin x \cos^2 x$, $u_1 = \frac{1}{3} \cos^3 x$; $u'_2 = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$, $u_2 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

$$y_p = \frac{1}{3} \cos^4 x + \sin^2 x - \frac{1}{3} \sin^4 x = \frac{1}{3} (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin^2 x.$$

답

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin^2 x \quad \left(= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x \right)$$

(4) $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$. 표준형 $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{3}e^x \sec x$, 즉 $f = \frac{1}{3}e^x \sec x$. $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$, $W = e^{2x}$.

$$u'_1 = -\frac{e^x \sin x \cdot \frac{1}{3}e^x \sec x}{e^{2x}} = -\frac{1}{3} \tan x, \quad u_1 = \frac{1}{3} \ln |\cos x|; \quad u'_2 = \frac{1}{3}, \quad u_2 = \frac{1}{3}x.$$

답

$$y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{3}e^x (\cos x \ln |\cos x| + x \sin x)$$

3 초기조건 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 이 있는 경우

(1) $4y'' - y = xe^{x/2}$. 표준형 $f = \frac{1}{4}xe^{x/2}$, $y_1 = e^{x/2}$, $y_2 = e^{-x/2}$, $W = -1$.

$$u'_1 = \frac{1}{4}x, \quad u_1 = \frac{1}{8}x^2; \quad u'_2 = -\frac{1}{4}xe^x, \quad u_2 = -\frac{1}{4}(x-1)e^x.$$

$y_p = \frac{1}{8}x^2e^{x/2} - \frac{1}{4}(x-1)e^{x/2}$. 일반해 $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2} + (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})e^{x/2}$ (상수항 $\frac{1}{4}e^{x/2}$ 는 c_1 에 흡수해도 된다). $y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$.

답

$$y = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)e^{x/2} + \frac{1}{4}e^{-x/2}$$

(2) $y'' - 2y' + y = e^x \sec^2 x$. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $W = e^{2x}$.

$$u'_1 = -x \sec^2 x, \quad u_1 = -x \tan x - \ln |\cos x|; \quad u'_2 = \sec^2 x, \quad u_2 = \tan x.$$

여기서 부분적분으로 $\int x \sec^2 x dx = x \tan x + \ln |\cos x|$ 를 썼다. 따라서 $y_p = e^x(-x \tan x - \ln |\cos x| + x \tan x) = -e^x \ln |\cos x|$. $y = (c_1 + c_2x)e^x - e^x \ln |\cos x|$ 에서 $y(0) = c_1 = 1$, $y'(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$.

답

$$y = (1-x)e^x - e^x \ln(\cos x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(3) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-4x}$, $W = -6e^{-2x}$.

$$u'_1 = \frac{1}{6}e^{-2x}(2e^{-2x} - e^{-x}) = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{6}e^{-3x}, \quad u'_2 = -\frac{1}{6}e^{4x}(2e^{-2x} - e^{-x}) = -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}.$$

$u_1 = -\frac{1}{12}e^{-4x} + \frac{1}{18}e^{-3x}$, $u_2 = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{18}e^{3x}$ 이므로 $y_p = -\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$ 에서 $c_1 + c_2 = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{41}{36}$, $2c_1 - 4c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = -\frac{7}{18} \Rightarrow c_1 = \frac{25}{36}$, $c_2 = \frac{4}{9}$.

답

$$y = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$$

4 적분이 초등함수가 아닌 경우

(1) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ ($x > 0$). $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $W = -4$.

$$u'_1 = \frac{e^{-2x} e^{2x}/x}{4} = \frac{1}{4x}, \quad u_1 = \frac{1}{4} \ln x; \quad u'_2 = -\frac{e^{2x} e^{2x}/x}{4} = -\frac{e^{4x}}{4x}.$$

답

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \ln x - \frac{1}{4} e^{-2x} \int_{x_0}^x \frac{e^{4t}}{t} dt, \quad x > 0$$

(2) $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$ ($x > 0$). 표준형 $f = 2\sqrt{x}$, $y_1 = e^{-x/2} \cos \frac{x}{2}$, $y_2 = e^{-x/2} \sin \frac{x}{2}$, $W = \frac{1}{2} e^{-x}$.

$$u'_1 = -4\sqrt{x} e^{x/2} \sin \frac{x}{2}, \quad u'_2 = 4\sqrt{x} e^{x/2} \cos \frac{x}{2}.$$

이 적분들도 초등함수가 아니다. $u_1 y_1 + u_2 y_2$ 를 하나의 적분으로 모으면

답

$$y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right) + 4 \int_0^x \sqrt{t} e^{-(x-t)/2} \sin \frac{x-t}{2} dt$$

비고. 마지막 식의 핵 $e^{-(x-t)/2} \sin \frac{x-t}{2}$ 는 §3.10의 영향 함수(one-sided Green's function)와 같은 역할을 한다. $y_p = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt$ 는 매개변수 변환법의 일반 공식이다.