

코시-오일러 방정식

$$y = x^p \text{ 와 보조방정식 } a_2 p^2 + (a_1 - a_2)p + a_0 = 0$$

공학수학 I · 강의노트 §3.6 Example 풀이

1 $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

보조방정식 $p^2 - 4p + 3 = (p-1)(p-3) = 0$ 이므로 $y_h = c_1 x + c_2 x^3$. 표준형 $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2 e^x$, 즉 $f = 2x^2 e^x$ 이고 $W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$.

$$u'_1 = -\frac{x^3 \cdot 2x^2 e^x}{2x^3} = -x^2 e^x, \quad u_1 = -(x^2 - 2x + 2)e^x; \quad u'_2 = \frac{x \cdot 2x^2 e^x}{2x^3} = e^x, \quad u_2 = e^x.$$

$$y_p = -x(x^2 - 2x + 2)e^x + x^3 e^x = 2x^2 e^x - 2x e^x.$$

답

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + 2x(x-1)e^x, \quad x > 0$$

2 제차 코시-오일러 방정식

(1) $x^2 y'' - 2y = 0$: $p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1) = 0$. $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$

(2) $xy'' + y' = 0$: 양변에 x 를 곱하면 $x^2 y'' + xy' = 0$, $p^2 = 0$ (중근). $y = c_1 + c_2 \ln x$

(3) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$: $p^2 + 4 = 0$, $p = \pm 2i$. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)$

3 매개변수 변환법

(1) $xy'' - 4y' = x^4$. x 를 곱하면 $x^2 y'' - 4xy' = x^5$, 보조방정식 $p^2 - 5p = 0$, $y_h = c_1 + c_2 x^5$. 표준형 $f = x^3$, $W = \begin{vmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{vmatrix} = 5x^4$.

$$u'_1 = -\frac{x^5 \cdot x^3}{5x^4} = -\frac{x^4}{5}, \quad u_1 = -\frac{x^5}{25}; \quad u'_2 = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5x}, \quad u_2 = \frac{1}{5} \ln x.$$

$y_p = -\frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{5}x^5 \ln x$ 이고, 첫 항은 $c_2 x^5$ 에 흡수된다.

답

$$y = c_1 + c_2 x^5 + \frac{1}{5}x^5 \ln x$$

(2) $x^2 y'' + xy' - y = \ln x$. $p^2 - 1 = 0$ 이므로 $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$, $W = -\frac{2}{x}$. 표준형 $f = \frac{\ln x}{x^2}$.

$$u'_1 = -\frac{x^{-1} \cdot \ln x / x^2}{-2/x} = \frac{\ln x}{2x^2}, \quad u_1 = -\frac{\ln x + 1}{2x}; \quad u'_2 = \frac{x \cdot \ln x / x^2}{-2/x} = -\frac{\ln x}{2}, \quad u_2 = -\frac{x \ln x - x}{2}.$$

$$y_p = -\frac{\ln x + 1}{2} - \frac{\ln x - 1}{2} = -\ln x.$$

답

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} - \ln x$$

비고. (2)는 $x = e^t$ 로 치환하면 $Y'' - Y = t$ 가 되어 $Y_p = -t$, 즉 $y_p = -\ln x$ 를 바로 얻는다. 코시-오일러 방정식은 $x = e^t$ 로 상수계수 방정식이 된다.