

비선형 방정식

중첩의 실패, $u = y'$ 치환, 테일러 급수 근사

공학수학 I · 강의노트 §3.7 Example 풀이

1 중첩이 성립하지 않는 예: $(y'')^2 = y^2$

$y_1 = e^x$: $y'' = e^x$ 이므로 $(y'')^2 = e^{2x} = y^2$. $y_2 = \cos x$: $y'' = -\cos x$ 이므로 $(y'')^2 = \cos^2 x = y^2$. 둘 다 해이다. 그러나 $y = c_1 e^x + c_2 \cos x$ 이면 $y'' = c_1 e^x - c_2 \cos x$ 이고

$$(y'')^2 - y^2 = (c_1 e^x - c_2 \cos x)^2 - (c_1 e^x + c_2 \cos x)^2 = -4c_1 c_2 e^x \cos x.$$

$c_1 c_2 \neq 0$ 이면 0이 아니므로 일반적으로 해가 아니다.

2 $u = y'$ 로 1계 방정식 만들기

(1) $y'' = 2x(y')^2$ (y 가 없음). $u' = 2xu^2$ 은 변수분리형: $-\frac{1}{u} = x^2 + c_1$, $y' = -\frac{1}{x^2 + c_1}$.

답

$$c_1 = a^2 > 0: y = -\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c_2; \quad c_1 = -a^2 < 0: y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c_2; \quad c_1 = 0: y = \frac{1}{x} + c_2;$$

그리고 $u = 0$ 에서 $y = c$.

(2) $yy'' = (y')^2$ (x 가 없음). $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$ 이므로

$$yu \frac{du}{dy} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \Rightarrow u = c_1 y \Rightarrow y' = c_1 y.$$

답

$$y = c_2 e^{c_1 x}$$

3 테일러 급수: $y'' = x + y - y^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

방정식을 반복해서 미분하고 $x = 0$ 을 넣는다.

$$\begin{aligned} y'' &= x + y - y^2 & \Rightarrow y''(0) &= 0 - 1 - 1 = -2 \\ y''' &= 1 + y' - 2yy' & \Rightarrow y'''(0) &= 1 + 1 + 2 = 4 \\ y^{(4)} &= y'' - 2(y')^2 - 2yy'' & \Rightarrow y^{(4)}(0) &= -2 - 2 - 4 = -8 \\ y^{(5)} &= y''' - 6y'y'' - 2yy''' & \Rightarrow y^{(5)}(0) &= 4 + 12 + 8 = 24 \end{aligned}$$

답

$$y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

4 종속변수가 없는 경우: $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

$u' = -(1 + u^2)$: $\arctan u = -x + c_1$, $y' = \tan(c_1 - x)$. 적분하면 $\int \tan(c_1 - x) dx = \ln |\cos(c_1 - x)|$.

답

$$y = \ln |\cos(c_1 - x)| + c_2$$

5 독립변수가 없는 경우: $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

$$y'' = u \frac{du}{dy}: yu \frac{du}{dy} + u^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{u du}{1+u^2} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow 1 + u^2 = \frac{c_1}{y^2}. \quad u = \pm \frac{\sqrt{c_1 - y^2}}{y} \text{ 이므로 } \frac{y dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = \pm dx, \\ -\sqrt{c_1 - y^2} = \pm(x + c_2).$$

답

$$(x + c_2)^2 + y^2 = c_1 \quad (\text{원의 일부})$$

6 초기값 문제: $y'' + yy' = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$

1. 수치해. $y' = u, u' = -yu$ 로 바꾸어 `solve_ivp`로 풀면 그림 1의 굵은 선이 된다.

2. 양함수해. $yy' = \frac{1}{2}(y^2)'$ 이므로 방정식은 $(y' + \frac{1}{2}y^2)' = 0$, 즉 $y' + \frac{1}{2}y^2 = c$. 초기조건에서 $c = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$:

$$y' = -\frac{1}{2}(1 + y^2) \Rightarrow \arctan y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

답

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

3. 정의 구간. $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 이어야 하므로 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. 이 구간 끝에서 $y \rightarrow \pm\infty$ 이다.

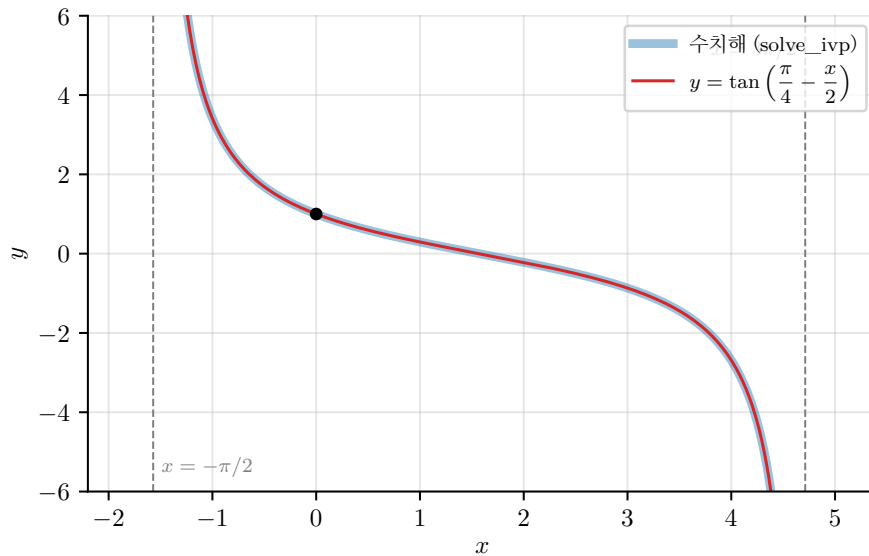


그림 1: 수치해(굵은 파란 선)와 양함수해(빨간 선). 해는 $x = -\pi/2$ 와 $x = 3\pi/2$ 에서 발산한다.

7 베르누이 방정식으로: $xy'' = y' + (y')^3$

$u = y'$: $xu' = u + u^3$, 즉 $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}u^3$ ($n = 3$ 인 베르누이 방정식). $w = u^{-2}$ 로 두면 $w' = -2u^{-3}u'$ 이므로

$$w' + \frac{2}{x}w = -\frac{2}{x} \Rightarrow (x^2w)' = -2x \Rightarrow w = -1 + \frac{c_1}{x^2}.$$

$$u^2 = \frac{x^2}{c_1 - x^2}, y' = \pm \frac{x}{\sqrt{c_1 - x^2}}, y = \mp \sqrt{c_1 - x^2} + c_2.$$

답

$$x^2 + (y - c_2)^2 = c_1, \text{ 그리고 } u = 0 \text{에서 } y = c$$