

선형 모델: 초기값 문제

강제 진동, 맥놀이, 공명

공학수학 I · 강의노트 §3.8 Example 풀이

1 해의 확인: $x'' + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t$, $x(0) = x'(0) = 0$ ($\gamma \neq \omega$)

$x_h = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. $\gamma \neq \omega$ 이면 $\cos \gamma t$ 가 x_h 와 겹치지 않으므로 $x_p = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$:

$$(\omega^2 - \gamma^2)(A \cos \gamma t + B \sin \gamma t) = F_0 \cos \gamma t \Rightarrow A = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}, B = 0.$$

$x(0) = c_1 + A = 0$ 에서 $c_1 = -A$, $x'(0) = c_2 \omega = 0$ 에서 $c_2 = 0$.

결과

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos \gamma t - \cos \omega t)$$

2 극한 $\gamma \rightarrow \omega$

분자와 분모가 모두 0으로 가므로($\frac{0}{0}$ 꼴) γ 에 대해 로피탈 정리를 쓴다(t 는 고정).

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{F_0(\cos \gamma t - \cos \omega t)}{\omega^2 - \gamma^2} = \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{-F_0 t \sin \gamma t}{-2\gamma} = \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t.$$

답

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} x(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t$$

비고. 이 극한은 §3.4에서 $x'' + \omega^2 x = F_0 \sin \omega t$ 를 미정계수법으로 푼 결과와 같은 꼴(진폭이 t 에 비례)이다. γ 가 ω 에 가까우면 곱셈 공식 $\cos \gamma t - \cos \omega t = 2 \sin \frac{(\omega - \gamma)t}{2} \sin \frac{(\omega + \gamma)t}{2}$ 에 의해 진폭이 천천히 변하는 맥놀이가 나타나고, $\gamma = \omega$ 에서는 진폭이 한없이 커지는 공명이 된다(그림 1).

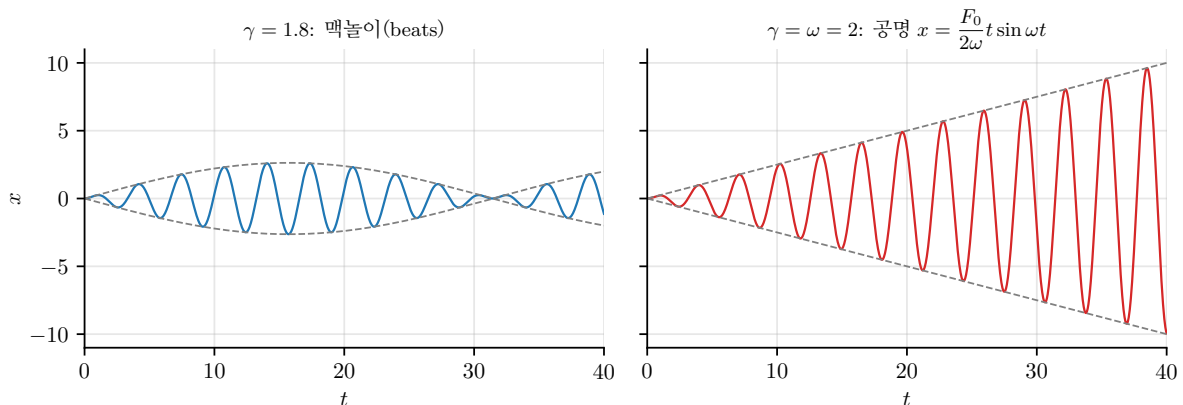


그림 1: $F_0 = 1$, $\omega = 2$. 왼쪽: $\gamma = 1.8$ 일 때의 맥놀이(점선은 포락선). 오른쪽: 공명.