

선형 모델: 경계값 문제

고리(ring) 안의 정상 온도 분포

공학수학 I · 강의노트 §3.9 Example 풀이

문제. $r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0$, $u(a) = u_0$, $u(b) = u_1$ ($0 < a < b$).

1 풀이

좌변은 $\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$ 이므로

$$r \frac{du}{dr} = c_1 \Rightarrow u = c_1 \ln r + c_2.$$

(코시-오일러 방정식 $r^2 u'' + r u' = 0$ 으로 보아도 보조방정식이 $p^2 = 0$ 이라 같은 해가 나온다.) 경계조건에서

$$c_1 \ln a + c_2 = u_0, \quad c_1 \ln b + c_2 = u_1 \Rightarrow c_1 = \frac{u_1 - u_0}{\ln(b/a)}, \quad c_2 = u_0 - c_1 \ln a.$$

답

$$u(r) = u_0 + (u_1 - u_0) \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}, \quad a \leq r \leq b$$

비고. 평면 고리에서는 온도가 r 에 대해 직선이 아니라 $\ln r$ 에 대해 직선으로 변한다. 열이 반지름 방향으로 흐를 때 단면(둘레 $2\pi r$)이 r 에 비례해 넓어지므로, 열유속 $-k du/dr$ 이 $1/r$ 에 비례해야 총 열량 $2\pi r \cdot (-k du/dr)$ 이 일정하기 때문이다.