

라플라스 변환의 정의

정의에 따른 적분, 선형성, 삼각함수 항등식

공학수학 I · 강의노트 §4.1 Example 풀이

이 문서에서 s 는 적분이 수렴할 만큼 크다고 가정한다(예: $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ 이면 $s > a$).

1 $\mathcal{L}\{1\}$, $\mathcal{L}\{t\}$, $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0),$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2},$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt = \frac{1}{s+3} \quad (s > -3).$$

2 계단 함수: $f = 0$ ($0 \leq t < 3$), $f = 2$ ($t \geq 3$)

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_3^{\infty} 2e^{-st} dt = \frac{2e^{-3s}}{s}.$$

3 삼각함수 항등식: $f(t) = \sin^2 2t$

$\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)$ 이므로

답

$$\mathcal{L}\{\sin^2 2t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 16} \right) = \frac{8}{s(s^2 + 16)}$$

4 구간별 함수

$$(1) \quad f = -1 \quad (0 \leq t < 1), \quad 1 \quad (t \geq 1): \quad \mathcal{L}\{f\} = -\int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{2e^{-s} - 1}{s}.$$

$$(2) \quad f = t \quad (0 \leq t < 1), \quad 1 \quad (t \geq 1): \quad \text{부분적분하면} \quad \int_0^1 te^{-st} dt = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2}, \quad \int_1^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-s}}{s}.$$

합하면 $\mathcal{L}\{f\} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}.$

$$(3) \quad f = \sin t \quad (0 \leq t < \pi), \quad 0 \quad (t \geq \pi): \quad \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt = \left[\frac{-e^{-st}(s \sin t + \cos t)}{s^2 + 1} \right]_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

답

$$(1) \quad \frac{2e^{-s} - 1}{s} \quad (2) \quad \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \quad (3) \quad \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

비고. §4.3의 단위 계단 함수를 쓰면 더 빨리 풀린다. 예를 들어 (2)는 $f = t - (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)$ 이므로 $\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$

5 여러 함수의 변환

- $e^{t+7} = e^7 e^t$: $\mathcal{L} = \frac{e^7}{s-1}$.
- $e^t \cos t$: $\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ (정의로 계산하거나 §4.3의 제1이동정리)에서 $\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$.
- $t \cos t$: $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ 와 $\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$ 을 쓰면 $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-i)^2} + \frac{1}{(s+i)^2} \right] = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.
- $\sin 3t \cos 3t = \frac{1}{2} \sin 6t$: $\mathcal{L} = \frac{3}{s^2+36}$.
- $\sin^4 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$: $\mathcal{L} = \frac{3}{8s} - \frac{s}{2(s^2+4)} + \frac{s}{8(s^2+16)} = \frac{24}{s(s^2+4)(s^2+16)}$.