

이동 정리

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f\} = F(s+a), \quad \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

공학수학 I · 강의노트 §4.3 Example 풀이

1 $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\}$ 와 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+3)^2}\right\}$

$\mathcal{L}\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$ 에서 $s \rightarrow s+2$:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}.$$

역변환은 분자를 $s+3$ 에 대해 정리한다: $\frac{2s+5}{(s+3)^2} = \frac{2(s+3)-1}{(s+3)^2} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{(s+3)^2}.$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+3)^2}\right\} = 2e^{-3t} - te^{-3t} = (2-t)e^{-3t}.$$

2 $F(s)$ 또는 $f(t)$ 구하기

- $\mathcal{L}\{te^{10t}\} = \frac{1}{(s-10)^2}, \quad \mathcal{L}\{t^{10}e^{-7t}\} = \frac{10!}{(s+7)^{11}}, \quad \mathcal{L}\{e^t \sin 3t\} = \frac{3}{(s-1)^2+9}.$
- $\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = (1-t)e^{-t}.$
- $\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)^3} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1} = 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}.$$

(부분분수 계수: s^2 쪽은 $\frac{2s-1}{(s+1)^3}$ 을 $s=0$ 에서 전개해 $-1+5s+\dots$, $(s+1)^3$ 쪽은 $\frac{2s-1}{s^2}$ 을 $s=-1$ 에서 전개해 $-3-4(s+1)-5(s+1)^2+\dots$.)

3 $y' + y = f(t), y(0) = 5, f = 3 \cos t \mathcal{U}(t - \pi)$

$$\cos t = -\cos(t-\pi) \text{ 이므로 } f = -3 \cos(t-\pi) \mathcal{U}(t-\pi), \quad \mathcal{L}\{f\} = -\frac{3se^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

$$(s+1)Y - 5 = -\frac{3se^{-\pi s}}{s^2+1} \Rightarrow Y = \frac{5}{s+1} - 3e^{-\pi s} \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}.$$

$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1/2}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s+1}{s^2+1}$ 의 역변환은 $-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$ 이다. 이것을 $t-\pi$ 만큼 이동하면 $(\cos(t-\pi) = -\cos t, \sin(t-\pi) = -\sin t)$

답

$$y = 5e^{-t} + \frac{3}{2} [e^{-(t-\pi)} + \cos t + \sin t] \mathcal{U}(t-\pi), \quad \text{즉 } y = \begin{cases} 5e^{-t}, & 0 \leq t < \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)} + \frac{3}{2}(\cos t + \sin t), & t \geq \pi \end{cases}$$

확인: $t = \pi$ 에서 괄호 안은 $1 - 1 + 0 = 0$ 이므로 y 는 연속이다.